

Tamanho-Ramsey multicolorido de potências de árvores de grau limitado

Taísa Martins - IMPA

Trabalho em conjunto com

Sören Berger - Hamburg University,

Yoshi Kohayakawa - USP,

Giulia Maesaka - Hamburg University,

Guilherme Oliveira Mota - UFABC,

Walner Mendonça - IMPA,

Olaf Parczyk - LSE

28 de Agosto de 2019

Teoria de Ramsey

Teoria de Ramsey é um ramo da combinatória que estuda a existência de certas subestruturas em estruturas suficientemente grandes.

Teorema (Ramsey '30)

Para todo grafo G , toda 2-coloração das arestas de um grafo completo suficientemente grande, contém uma cópia monocromática de G .

Teoria de Ramsey

Teoria de Ramsey é um ramo da combinatória que estuda a existência de certas subestruturas em estruturas suficientemente grandes.

Teorema (Ramsey '30)

Para todo grafo G , toda 2-coloração das arestas de um grafo completo suficientemente grande, contém uma cópia monocromática de G .

Para G fixo, qual o menor tamanho de um grafo completo com essa propriedade?

Teoria de Ramsey

Teoria de Ramsey é um ramo da combinatória que estuda a existência de certas subestruturas em estruturas suficientemente grandes.

Teorema (Ramsey '30)

Para todo grafo G , toda 2-coloração das arestas de um grafo completo suficientemente grande, contém uma cópia monocromática de G .

Para G fixo, qual o menor tamanho de um grafo completo com essa propriedade?

Número de Ramsey de G denotado por $r(G)$.

Área ativa de pesquisa que continua a se expandir e ramificar em diversas direções.

Tamanho-Ramsey

Introduzido por Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp em 1972.

O número do tamanho-Ramsey de um grafo G , denotado por $\hat{r}_s(G)$, é o menor inteiro m tal que existe um grafo H com m arestas tal que qualquer s -coloração de $E(H)$ contém uma cópia monocromática de G .

P_n : caminho em n vértices

$$r_2(P_n) = \Theta(n) \implies \hat{r}_2(P_n) = O(n^2).$$

Tamanho-Ramsey

Introduzido por Erdős, Faudree, Rousseau e Schelp em 1972.

O número do tamanho-Ramsey de um grafo G , denotado por $\hat{r}_s(G)$, é o menor inteiro m tal que existe um grafo H com m arestas tal que qualquer s -coloração de $E(H)$ contém uma cópia monocromática de G .

P_n : caminho em n vértices

$$r_2(P_n) = \Theta(n) \implies \hat{r}_2(P_n) = O(n^2).$$

Teorema (Beck '83 - probabilística; Alon-Chung '88 - Construtiva)

$$\hat{r}_2(P_n) = \Theta(n)$$

Teorema (Dudek, Prałat '17. Krivelevich '19)

Para quaisquer $s \geq 2$ cores, existem constantes c e C tais que

$$cs^2n \leq \hat{r}_s(P_n) \leq Cs^2(\log s)n.$$

Grafos de grau limitado

Pergunta (Beck '90)

Se H possui grau limitado, então $\hat{r}_2(H)$ é linear no tamanho de H ?

Grafos de grau limitado

Pergunta (Beck '90)

Se H possui grau limitado, então $\hat{r}_2(H)$ é linear no tamanho de H ?

Teorema (Haxell, Kohayakawa, Łuczak '95)

$$\hat{r}_2(C_n) = \Theta(n)$$

Grafos de grau limitado

Pergunta (Beck '90)

Se H possui grau limitado, então $\hat{r}_2(H)$ é linear no tamanho de H ?

Teorema (Haxell, Kohayakawa, Łuczak '95)

$$\hat{r}_2(C_n) = \Theta(n)$$

Teorema (Friedman, Pippenger '87)

Para qualquer árvore T_n de grau limitado, $\hat{r}_2(T_n) = \Theta(n)$.

Grafos de grau limitado

Pergunta (Beck '90)

Se H possui grau limitado, então $\hat{r}_2(H)$ é linear no tamanho de H ?

Teorema (Haxell, Kohayakawa, Łuczak '95)

$$\hat{r}_2(C_n) = \Theta(n)$$

Teorema (Friedman, Pippenger '87)

Para qualquer árvore T_n de grau limitado, $\hat{r}_2(T_n) = \Theta(n)$.

Teorema (Rödl, Szemerédi '00)

Existe uma família de grafos 3-regulares com n vértices, $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $\hat{r}_2(H_n) = \Omega(n \log^{1/60} n)$

Grafos de grau limitado

Pergunta (Beck '90)

Se H possui grau limitado, então $\hat{r}_2(H)$ é linear no tamanho de H ?

Teorema (Haxell, Kohayakawa, Łuczak '95)

$$\hat{r}_2(C_n) = \Theta(n)$$

Teorema (Friedman, Pippenger '87)

Para qualquer árvore T_n de grau limitado, $\hat{r}_2(T_n) = \Theta(n)$.

Teorema (Rödl, Szemerédi '00)

Existe uma família de grafos 3-regulares com n vértices, $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $\hat{r}_2(H_n) = \Omega(n \log^{1/60} n)$

Teorema (Kohayakawa, Rödl, Schacht, Szemerédi '11)

Para qualquer inteiro positivo Δ , existe uma constante c tal que:

$$\hat{r}_2(H) \leq cn^{2-1/\Delta} \log^{1/\Delta} n$$

para qualquer grafo H com n vértices e grau máximo Δ .

Linearidade do tamanho-Ramsey

Uma pergunta natural:

Quais são os grafos H tais que $e(H) = m$ e temos que $\hat{r}_2(H) = O(m)$?

D. Clemens, M. Jenssen, Y. Kohayakawa, N. Morrison, G. O. Mota,
D. Reding, B. Roberts '19

$$\hat{r}_2(P_n^k) = O(n)$$

Linearidade do tamanho-Ramsey

Uma pergunta natural:

Quais são os grafos H tais que $e(H) = m$ e temos que $\hat{r}_2(H) = O(m)$?

D. Clemens, M. Jenssen, Y. Kohayakawa, N. Morrison, G. O. Mota,
D. Reding, B. Roberts '19

$$\hat{r}_2(P_n^k) = O(n)$$

J. Han, M. Jenssen, Y. Kohayakawa, G. O. Mota, B. Roberts '19+

$$\hat{r}_s(P_n^k) = O(n)$$

Linearidade do tamanho-Ramsey

Teorema (Berger, Kohayakawa, Maesaka, M., Mendonça, Mota, Parczyk)

Para quaisquer inteiros positivos k , Δ , s , e para qualquer árvore T com n -vértices e grau máximo limitado por Δ , temos que

$$\hat{r}_s(T^k) = O_{k,\Delta,s}(n).$$

Linearidade do tamanho-Ramsey

Teorema (Berger, Kohayakawa, Maesaka, M., Mendonça, Mota, Parczyk)

Para quaisquer inteiros positivos k , Δ , s , e para qualquer árvore T com n -vértices e grau máximo limitado por Δ , temos que

$$\hat{r}_s(T^k) = O_{k,\Delta,s}(n).$$

Teorema (Berger, Kohayakawa, Maesaka, M., Mendonça, Mota, Parczyk)

Para quaisquer inteiros positivos k , Δ , s , e para qualquer grafo H com n -vértices, grau máximo limitado por Δ e treewidth k , temos que

$$\hat{r}_s(H) = O_{k,\Delta,s}(n).$$

Linearidade do tamanho-Ramsey

Teorema (Berger, Kohayakawa, Maesaka, M., Mendonça, Mota, Parczyk)

Para quaisquer inteiros positivos k , Δ , s , e para qualquer árvore T com n -vértices e grau máximo limitado por Δ , temos que

$$\hat{r}_s(T^k) = O_{k,\Delta,s}(n).$$

Teorema (Berger, Kohayakawa, Maesaka, M., Mendonça, Mota, Parczyk)

Para quaisquer inteiros positivos k , Δ , s , e para qualquer grafo H com n -vértices, grau máximo limitado por Δ e treewidth k , temos que

$$\hat{r}_s(H) = O_{k,\Delta,s}(n).$$

Independentemente, 2 cores: Kamčev, Liebenau, Wood, Yepremyan '19+

Linearidade do tamanho-Ramsey

Teorema (Berger, Kohayakawa, Maesaka, M., Mendonça, Mota, Parczyk)

Para quaisquer inteiros positivos k , Δ , s , e para qualquer árvore T com n -vértices e grau máximo limitado por Δ , temos que

$$\hat{r}_s(T^k) = O_{k,\Delta,s}(n).$$

Teorema (Berger, Kohayakawa, Maesaka, M., Mendonça, Mota, Parczyk)

Para quaisquer inteiros positivos k , Δ , s , e para qualquer grafo H com n -vértices, grau máximo limitado por Δ e treewidth k , temos que

$$\hat{r}_s(H) = O_{k,\Delta,s}(n).$$

Independentemente, 2 cores: Kamčev, Liebenau, Wood, Yepremyan '19+

- Segue que o 'off-diagonal' tamanho-Ramsey $\hat{r}(T_1^k, \dots, T_s^k)$ é linear em $\max_{1 \leq i \leq s} v(T_i)$ para árvores de grau limitado $T_1, \dots, T_s$

Linearidade do tamanho-Ramsey

Teorema (Berger, Kohayakawa, Maesaka, M., Mendonça, Mota, Parczyk)

Para quaisquer inteiros positivos k, Δ, s , e para qualquer árvore T com n -vértices e grau máximo limitado por Δ , temos que

$$\hat{r}_s(T^k) = O_{k,\Delta,s}(n).$$

Teorema (Berger, Kohayakawa, Maesaka, M., Mendonça, Mota, Parczyk)

Para quaisquer inteiros positivos k, Δ, s , e para qualquer grafo H com n -vértices, grau máximo limitado por Δ e treewidth k , temos que

$$\hat{r}_s(H) = O_{k,\Delta,s}(n).$$

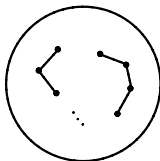
Independentemente, 2 cores: Kamčev, Liebenau, Wood, Yepremyan '19+

- Segue que o 'off-diagonal' tamanho-Ramsey $\hat{r}(T_1^k, \dots, T_s^k)$ é linear em $\max_{1 \leq i \leq s} v(T_i)$ para árvores de grau limitado $T_1, \dots, T_s$
- Existência de 'partition universal graphs' com $O(n)$ arestas para a família de potências T^k de árvores com n vértices e $\Delta(T) \leq \Delta$.

Ideia da prova

Considere um subgrafo $G \subseteq G(A_n, p)$ onde $p = c/n$.

$$G \subseteq G(A_n, p)$$



$$v(G) = an \text{ e } \Delta(G) \leq b$$

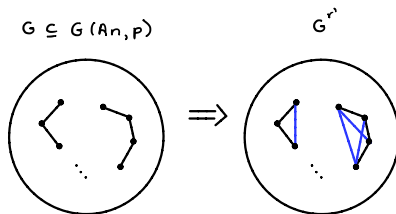
G é bijumbled

G não possui ciclos pequenos

Ideia da prova

Considere um subgrafo $G \subseteq G(A_n, p)$ onde $p = c/n$.

Tire a r -ésima potência de G .



$$v(G) = an \text{ e } \Delta(G) \leq b$$

G é bijumbled

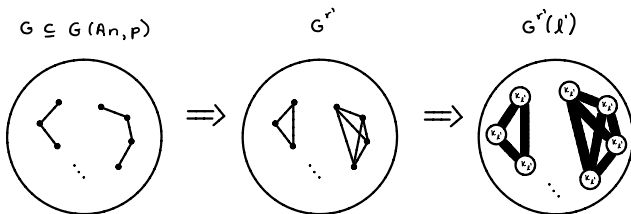
G não possui ciclos pequenos

Ideia da prova

Considere um subgrafo $G \subseteq G(A_n, p)$ onde $p = c/n$.

Tire a r' -ésima potência de G .

Considere o blow-up completo $G^{r'}(l')$ de $G^{r'}$ em $l' \geq r_b(t)$ vértices.



$$v(G) = an \text{ e } \Delta(G) \leq b$$

G é bijumbled

G não possui ciclos pequenos

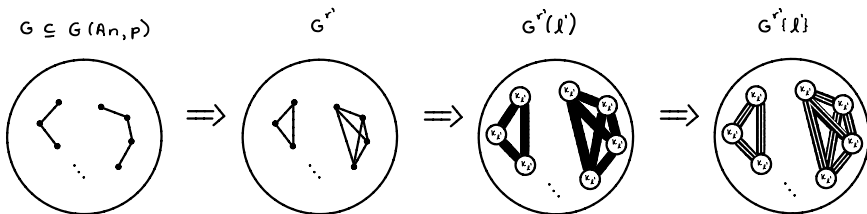
Ideia da prova

Considere um subgrafo $G \subseteq G(A_n, p)$ onde $p = c/n$.

Tire a r -ésima potência de G .

Considere o blow-up completo $G^r(l')$ de G^r em $l' \geq r_\Delta(t)$ vértices.

Remova um emparelhamento perfeito entre cada par de classes.



$$v(G) = an \text{ e } \Delta(G) \leq b$$

G é bijumbled

G não possui ciclos pequenos

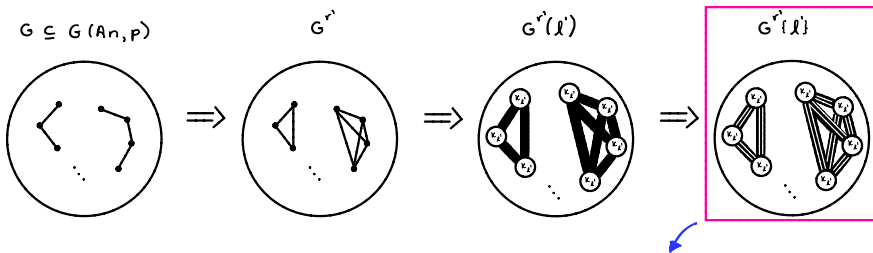
Ideia da prova

Considere um subgrafo $G \subseteq G(A_n, p)$ onde $p = c/n$.

Tire a r -ésima potência de G .

Considere o blow-up completo $G^r(l')$ de G^r em $l' \geq r_\Delta(t)$ vértices.

Remova um emparelhamento perfeito entre cada par de classes.



$$v(G) = an \text{ e } \Delta(G) \leq b$$

G é bijumbled

G não possui ciclos pequenos

Esse é o nosso grafo!

Ideia da prova

Indução no número s de cores

Ideia da prova

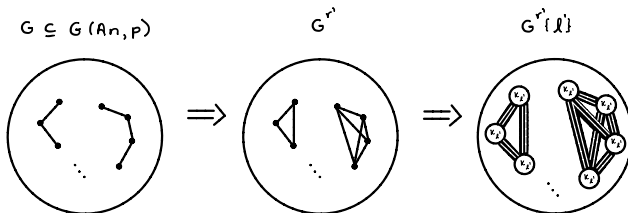
Indução no número s de cores

Lema (Passo de indução)

- Existe uma cópia monocromática de T^k em $G^{r'}\{\ell'\}$, ou
- Existe um subgrafo H com “certas propriedades” tal que $H^r\{\ell\} \subseteq G^{r'}\{\ell'\}$ e essa cópia de $H^r\{\ell\}$ usa no máximo $s - 1$ cores.

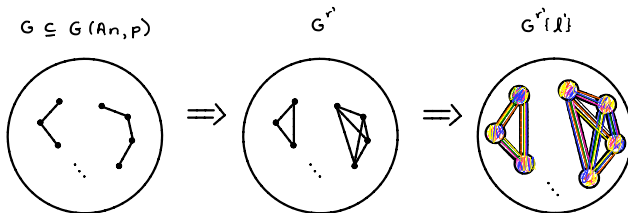
Ideia da prova

Visão geral



Ideia da prova

Considere uma s -coloração arbitrária de $E(G^r\{l\})$

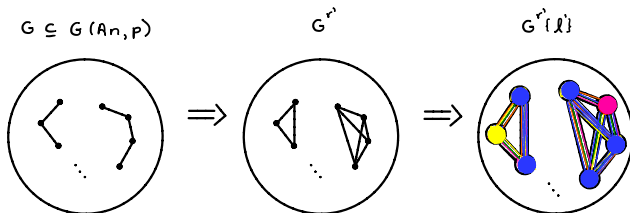


Ideia da prova

Considere uma r -coloração arbitrária de $E(G^r\{l\})$

↳ Como cada classe tem $r_n(t)$ vértices, cada classe contém um K_t monocromático.

↳ Pelo menos $v(G)/r_n$ desses grafos completos possuem a mesma cor, digamos **azul**.

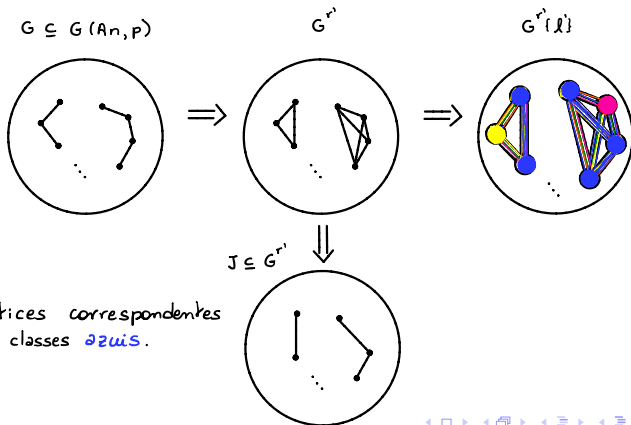


Ideia da prova

Considere uma r -coloração arbitrária de $E(G^r\{l\})$

↳ Como cada classe tem $r_{\geq}(t)$ vértices, cada classe contém um K_t monocromático.

↳ Pelo menos $v(G)/r$ desses grafos completos possuem a mesma cor, digamos **azul**.

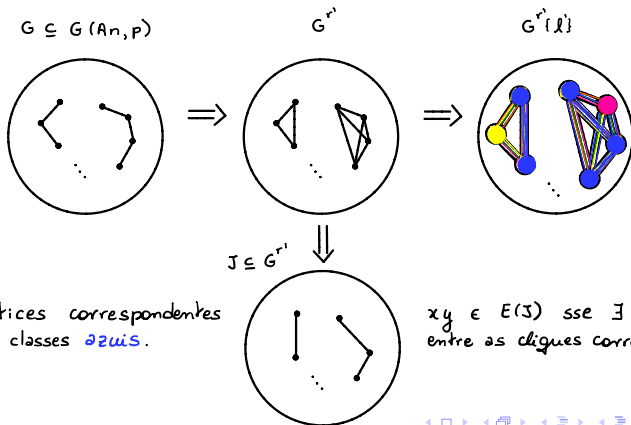


Ideia da prova

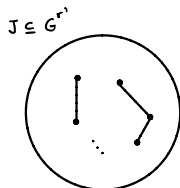
Considere uma r -coloração arbitrária de $E(G^{r,l})$

↳ Como cada classe tem $r_{\Delta}(t)$ vértices, cada classe contém um K_t monocromático.

↳ Pelo menos $v(G)/r_{\Delta}$ desses grafos completos possuem a mesma cor, digamos **azul**.



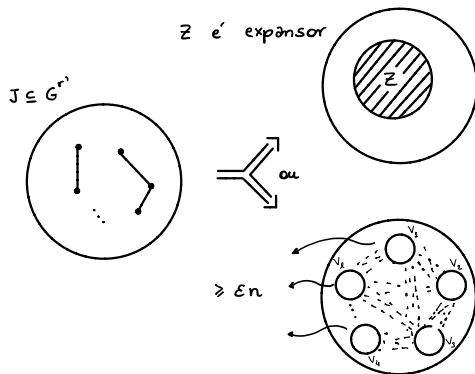
Ideia da prova



Ideia da prova

Lema

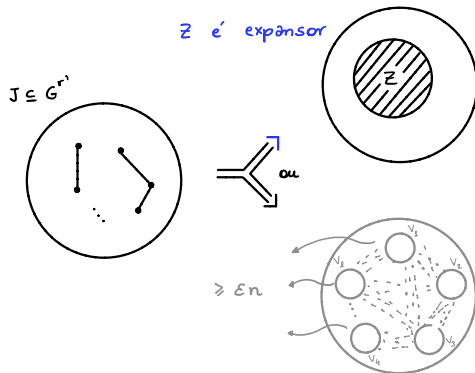
$\exists Z$ expãnsor ou $\exists$ l subconjuntos grandes de vértices com nenhuma aresta entre eles em J .



Ideia da prova

Lema

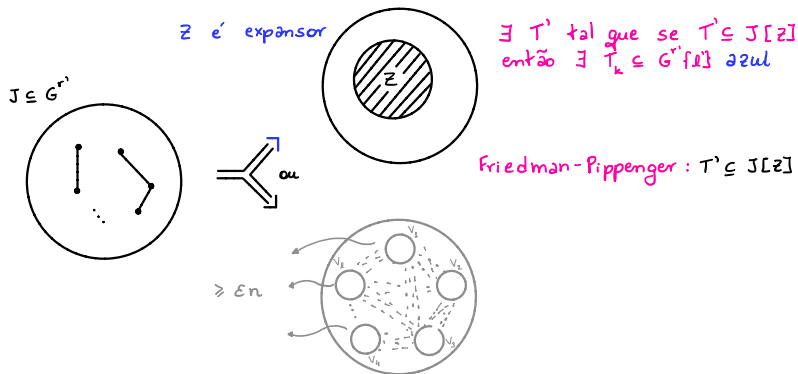
$\exists Z$ expensor ou $\exists$ l subconjuntos grandes de vértices com nenhuma aresta entre eles em J .



Ideia da prova

Lema

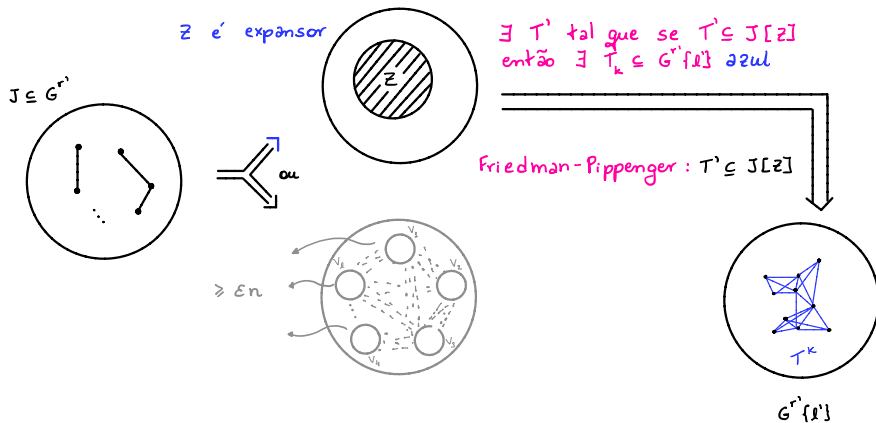
$\exists Z$ expensor ou $\exists l$ subconjuntos grandes de vértices com nenhuma aresta entre eles em J .



Ideia da prova

Lema

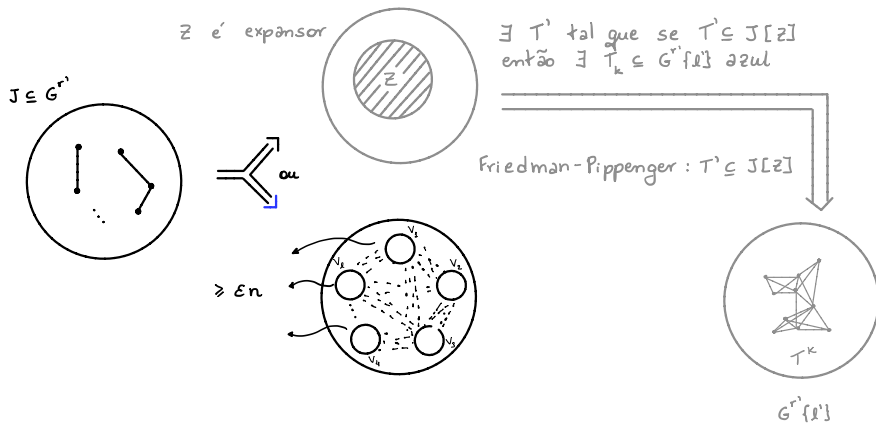
$\exists Z$ expânsor ou $\exists l$ subconjuntos grandes de vértices com nenhuma aresta entre eles em J .



Ideia da prova

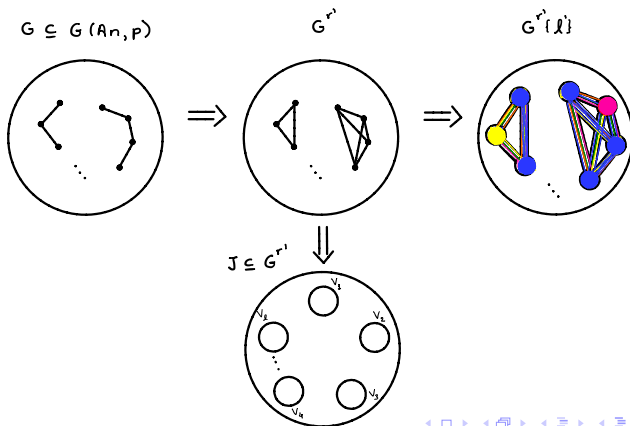
Lema

$\exists Z$ expensor ou $\exists l$ subconjuntos grandes de vértices com nenhuma aresta entre eles em J .



Ideia da prova

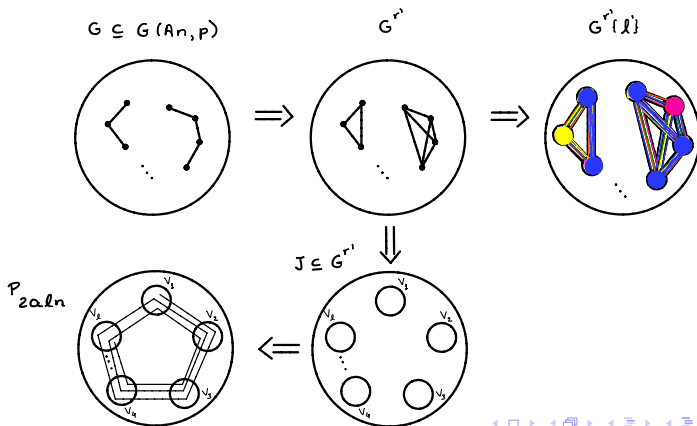
Relembrando o cenário geral ...



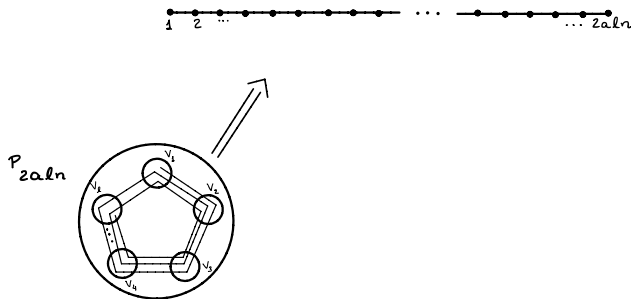
Ideia da prova

Relembrando o cenário geral ...

Obtemos um caminho transversal P_{2aln} em G

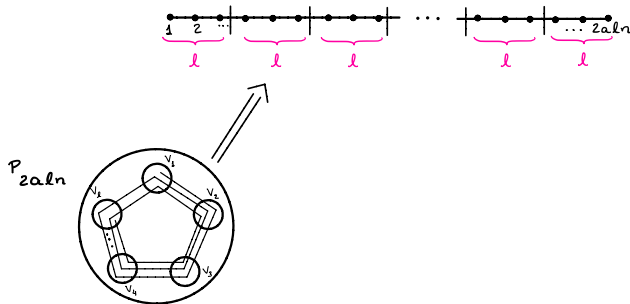


Ideia da prova



Ideia da prova

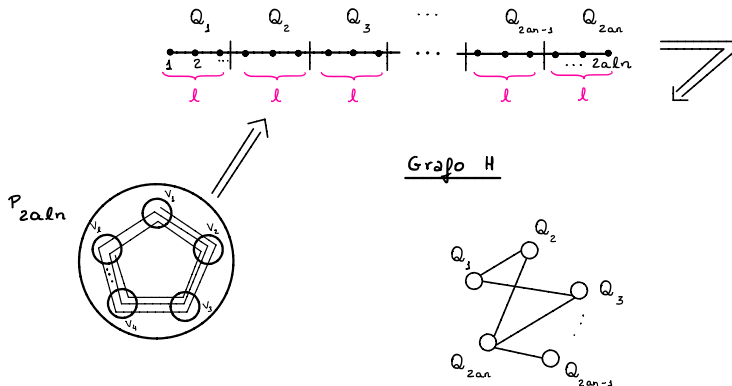
Particione o caminho P_{2aln} em $2an$ caminhos de comprimento l .



Ideia da prova

Particione o caminho P_{2aln} em $2an$ caminhos de comprimento l .

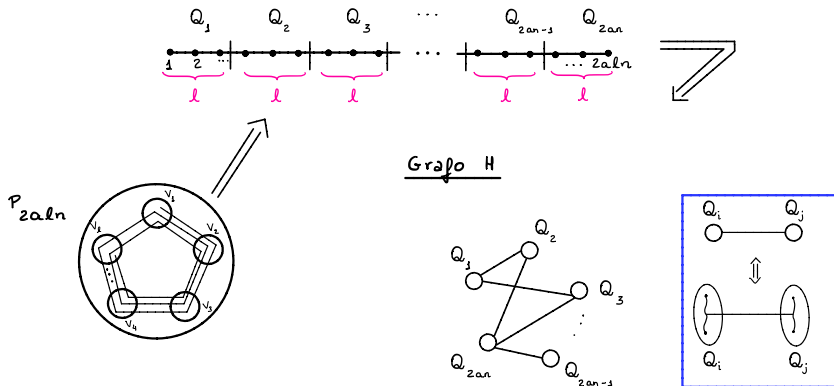
Considere o grafo H com $2an$ vértices, $Q_1, \dots, Q_{2an}$



Ideia da prova

Particione o caminho P_{2aln} em $2an$ caminhos de comprimento l .

Considere o grafo H com $2an$ vértices, $Q_1, \dots, Q_{2an}$ e arestas $Q_i Q_j$ se e somente se existe uma aresta entre Q_i e Q_j em G .

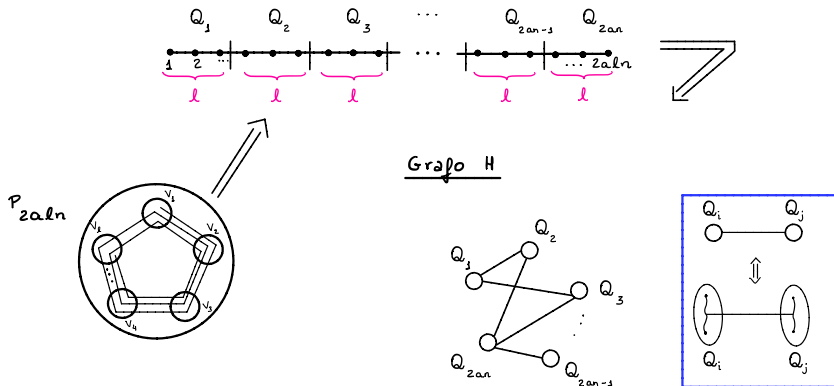


Ideia da prova

Particione o caminho P_{2aln} em $2an$ caminhos de comprimento l .

Considere o grafo H com $2an$ vértices, $Q_1, \dots, Q_{2an}$ e arestas $Q_i Q_j$ se e somente se existe uma aresta entre Q_i e Q_j em G .

Podemos ver $H^r(l)$ como um subgrafo de G^r .

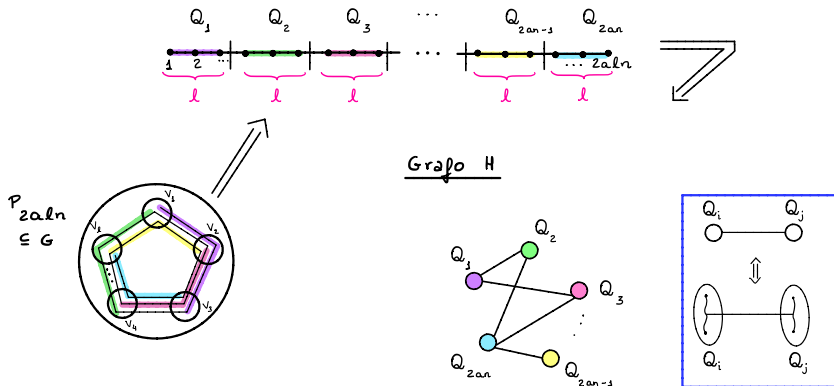


Ideia da prova

Particione o caminho P_{2aln} em $2an$ caminhos de comprimento l .

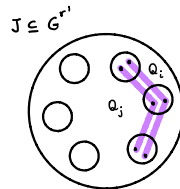
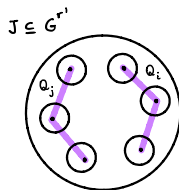
Considere o grafo H com $2an$ vértices, $Q_1, \dots, Q_{2an}$ e arestas $Q_i Q_j$ se e somente se existe uma aresta entre Q_i e Q_j em G .

Podemos ver $H^r(l)$ como um subgrafo de G^r .



Ideia da prova

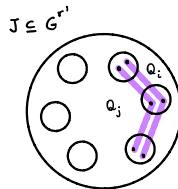
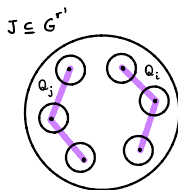
Quais arestas de J podem estar presentes em $H^r(l) \subseteq G^{r'}$?



Ideia da prova

Quais arestas de J podem estar presentes em $H^r(l) \subseteq G^{r'}$?

Talvez não exista nenhuma aresta entre vértices de Q_i e Q_j em J .

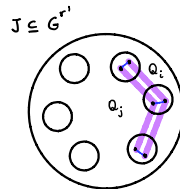
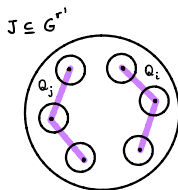


Ideia da prova

Quais arestas de J podem estar presentes em $H^r(l) \subseteq G^{r'}$?

Talvez não exista nenhuma aresta entre vértices de Q_i e Q_j em J .

No pior caso, pode existir um emparelhamento entre os vértices.



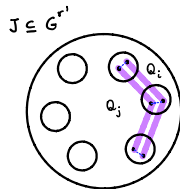
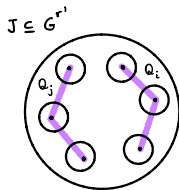
Ideia da prova

Quais arestas de J podem estar presentes em $H^r(l) \subseteq G^{r'}$?

Talvez não exista nenhuma aresta entre vértices de Q_i e Q_j em J .

No pior caso, pode existir um emparelhamento entre os vértices.

$\Rightarrow$ Existe uma cópia do grafo $H^r(l)$ em $G^{r'}$ sem arestas de J .



Ideia da prova

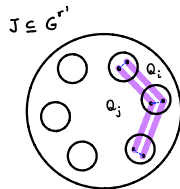
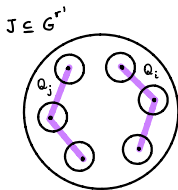
Quais arestas de $\mathcal{J}$ podem estar presentes em $H^r(\mathcal{I}) \subseteq G^{r'}$?

Talvez não exista nenhuma aresta entre vértices de Q_i e Q_j em $\mathcal{J}$.

No pior caso, pode existir um emparelhamento entre os vértices.

$\Rightarrow$ Existe uma cópia do grafo $H^r(\mathcal{I})$ em $G^{r'}$ sem arestas de $\mathcal{J}$.

Kővári - Sós - Turán + Lovász Local Lemma $\Rightarrow \exists$ uma cópia de $H^r(\mathcal{I})$ em $G^{r'(\mathcal{I})}$
sem nenhuma aresta azul.



Ideia da prova

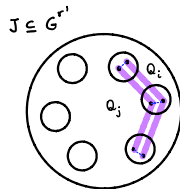
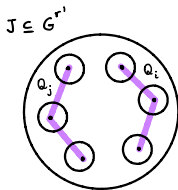
Quais arestas de J podem estar presentes em $H^r(l) \subseteq G^{r'}$?

Talvez não exista nenhuma aresta entre vértices de Q_i e Q_j em J .

No pior caso, pode existir um emparelhamento entre os vértices.

$\Rightarrow$ Existe uma cópia do grafo $H^r(l)$ em $G^{r'}$ sem arestas de J .

Kővári - Sós - Turán + Lovász Local Lemma $\Rightarrow \exists$ uma cópia de $H^r(l)$ em $G^{r'}$ sem nenhuma aresta azul.



Provamos que H é bijumbled (com os parâmetros certos) e continuamos a indução.

Resultados recentes e problemas em aberto

Teorema (Clemens, Miralaei, Reding, Schacht, Taraz '19+)

$\hat{r}_2(G_{n,n}) \leq n^{3+o(1)}$ onde $G_{n,n}$ é o grid $n \times n$.

Pergunta: $\hat{r}_2(G_{n,n}) = O(n^2)$?

Resultados recentes e problemas em aberto

Teorema (Clemens, Miralaei, Reding, Schacht, Taraz '19+)

$\hat{r}_2(G_{n,n}) \leq n^{3+o(1)}$ onde $G_{n,n}$ é o grid $n \times n$.

Pergunta: $\hat{r}_2(G_{n,n}) = O(n^2)$?

E para hypergrafos?

Dudek, La Fleur, Mubayi, Rödl '16: $\hat{r}_2(P_n^{(k)}) = O(n)$?

Resultados recentes e problemas em aberto

Teorema (Clemens, Miralaei, Reding, Schacht, Taraz '19+)

$\hat{r}_2(G_{n,n}) \leq n^{3+o(1)}$ onde $G_{n,n}$ é o grid $n \times n$.

Pergunta: $\hat{r}_2(G_{n,n}) = O(n^2)$?

E para hypergrafos?

Dudek, La Fleur, Mubayi, Rödl '16: $\hat{r}_2(P_n^{(k)}) = O(n)$?

Han, Kohayakawa, Mota, Parczyk '19+: $\hat{r}_2(P_n^{(3)}) = O(n)$.

Resultados recentes e problemas em aberto

Teorema (Clemens, Miralaei, Reding, Schacht, Taraz '19+)

$\hat{r}_2(G_{n,n}) \leq n^{3+o(1)}$ onde $G_{n,n}$ é o grid $n \times n$.

Pergunta: $\hat{r}_2(G_{n,n}) = O(n^2)$?

E para hypergrafos?

Dudek, La Fleur, Mubayi, Rödl '16: $\hat{r}_2(P_n^{(k)}) = O(n)$?

Han, Kohayakawa, Mota, Parczyk '19+: $\hat{r}_2(P_n^{(3)}) = O(n)$.

Obrigada!