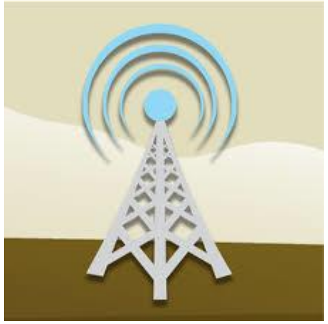
UMA CONDIÇÃO DE SUFICIÊNCIA PARA O PROBLEMA DA QUASE-BIPARTIÇÃO EM GRAFOS DE DISTÂNCIA-HEREDITÁRIA

Rodolfo Oliveira (INFES- UFF)

Raquel Bravo (IC-UFF)

Uéverton Souza (IC-UFF)

Fábio Silva Jr (IC-UFF)



PARTIÇÃO

Dado um conjunto A, uma partição consiste em dividir A em subconjuntos não-vazios $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$, de modo que:

i. $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $1 \leq i, j \leq k$ e $i \neq j$;

ii. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k$.

PARTIÇÃO

Dado um conjunto A, uma partição consiste em dividir A em subconjuntos não-vazios $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$, de modo que:

i. $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $1 \leq i, j \leq k$ e $i \neq j$;

ii. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k$.

Em grafos podemos ter problemas de partições em subconjuntos não necessariamente não-vazios dos conjuntos de vértices ou arestas.

APLICAÇÕES

Os problemas de partições do conjunto de vértices de um grafo possuem aplicações bem interessantes, tais como:

- Problemas de agrupamento e detecção em redes sociais, biológicas e de transportes;
- No processamento de imagens;
- No desenvolvimento de sistemas VLSI;
- No "ranqueamento" de páginas web;
- Nos problemas de escalonamento de tarefas.

APLICAÇÕES

bipartição

Os problemas de partições do conjunto de vértices de um grafo possuem aplicações bem interessantes, tais como:

- Problemas de agrupamento e detecção em redes sociais, biológicas e de transportes;
- No processamento de imagens;
- No desenvolvimento de sistemas VLSI;
- No “ranqueamento” de páginas web;
- Nos problemas de escalonamento de tarefas.

clusterização

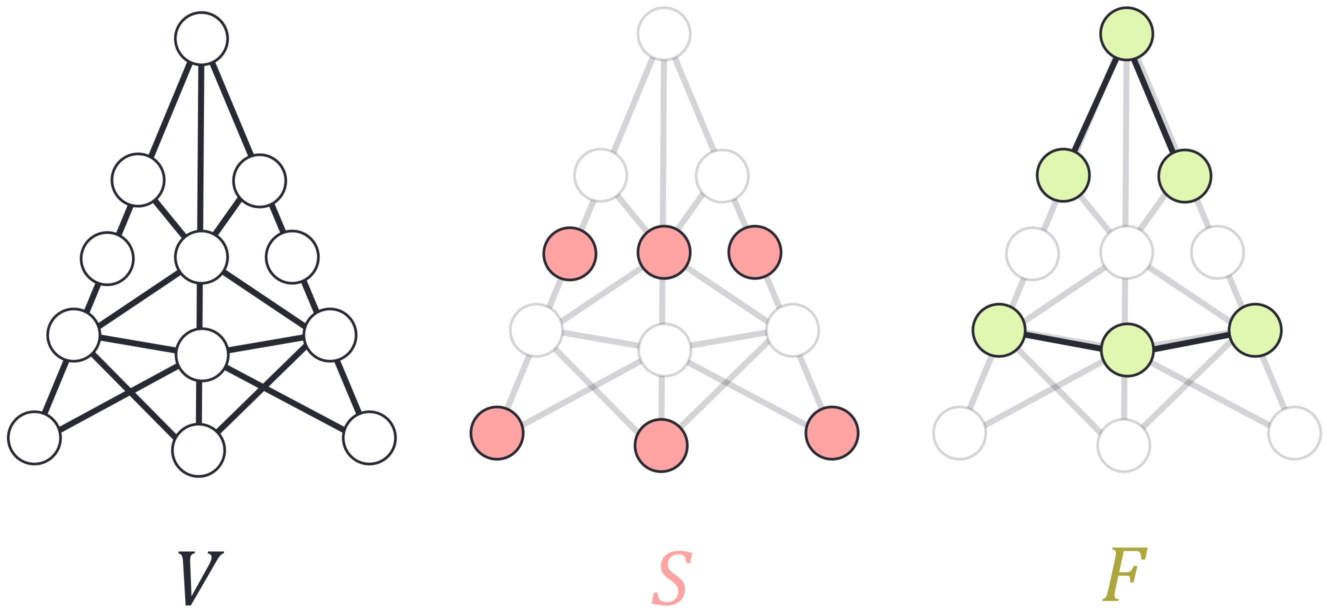
coloração

QB: DEFINIÇÃO

Formulado por Yang & Yuan (2006), um dado grafo $G = (V,E)$ é dito admitir uma quase-bipartição (S,F) se o conjunto V puder ser particionado em dois subconjuntos S e F, onde S é um conjunto estável (ou independente) e F é um conjunto acíclico (i.e., induz uma floresta).

QB: EXEMPLO

Formulado por Yang & Yuan (2006), um dado grafo $G = (V,E)$ é dito admitir uma quase-bipartição (S,F) se o conjunto V puder ser particionado em dois subconjuntos S e F, onde S é um conjunto estável (ou independente) e F é um conjunto acíclico (i.e., induz uma floresta).



QB: CONDIÇÃO NECESSÁRIA

Formulado por Yang & Yuan (2006), um dado grafo $G = (V,E)$ é dito admitir uma quase-bipartição (S,F) se o conjunto V puder ser particionado em dois subconjuntos S e F, onde S é um conjunto estável (ou independente) e F é um conjunto acíclico (i.e., induz uma floresta).

Propriedade 1 [Yang e Yuan, 2006]

Se um grafo G admite uma quase-bipartição (S,F), então G é 3-colorível.

QB: OBSERVAÇÃO

Formulado por Yang & Yuan (2006), um dado grafo $G = (V,E)$ é dito admitir uma quase-bipartição (S,F) se o conjunto V puder ser particionado em dois subconjuntos S e F, onde S é um conjunto estável (ou independente) e F é um conjunto acíclico (i.e., induz uma floresta).

OBSERVAÇÃO:
Por vacuidade, o conjunto vazio satisfaz as propriedades de ser estável e acíclico e, portanto, podem ocorrer $S = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.

QB: COMPLEXIDADE

O problema é NP-completo, mesmo para grafos restritos a:

i. diâmetro 3;
ii. grau máximo 4;
iii. grafos perfeitos.

QB: COMPLEXIDADE

O problema é NP-completo, mesmo para grafos restritos a:

i. diâmetro 3;
ii. grau máximo 4;
iii. grafos perfeitos.

$$\boldsymbol{\omega(G)} = \boldsymbol{\chi(G)}$$

Tamanho da maior clique.

Menor número cromático.

QB: COMPLEXIDADE

O problema é NP-completo, mesmo para grafos restritos a:

i. diâmetro 3;
ii. grau máximo 4;
iii. grafos perfeitos.

No entanto, polinomial para grafos cordais e cografos.

QB: COMPLEXIDADE

O problema é NP-completo, mesmo para grafos restritos a:

i. diâmetro 3;
ii. grau máximo 4;
iii. grafos perfeitos.

Qual a complexidade para grafos de distância-hereditária?

DH: CARACTERIZAÇÕES

Introduzido por Howorka (1977), um grafo G é dito distância-hereditária (DH) se para qualquer subgrafo induzido e conexo $H = G[X]$, a distância entre quaisquer dois vértices u e v de X é a mesma tanto em H quanto em G.

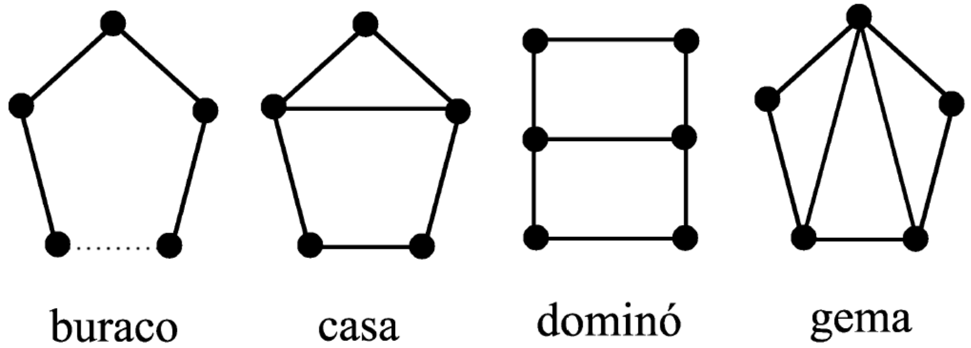
DH: CARACTERIZAÇÕES

Propriedade 2 [Howorka, 1977]

Um grafo é DH se, e somente se, todo ciclo de comprimento no mínimo 5 tem uma ou mais diagonais que se cruzam.

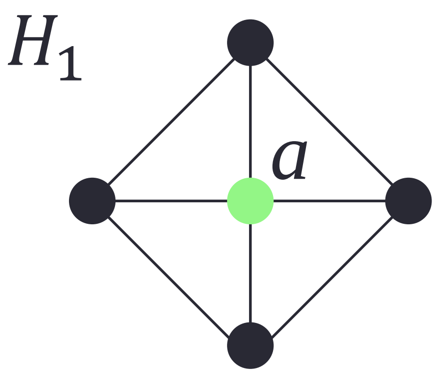
Propriedade 3 [Bandelt e Mulder, 1986]

Um grafo é DH se, e somente se, não possui buraco, casa, dominó e gema como subgrafos induzidos.

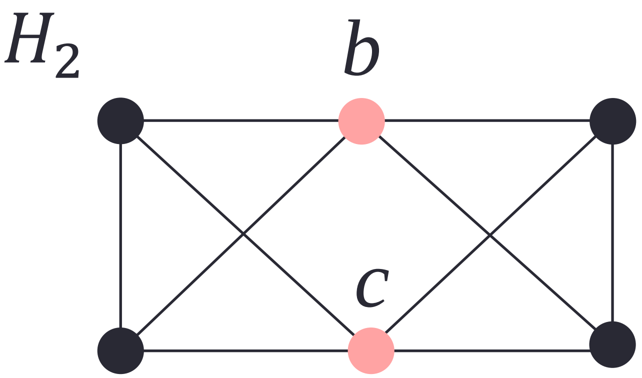


DH: ESTRUTURAS ESPECIAIS

- Subgrafos que precisamos ter cuidado:



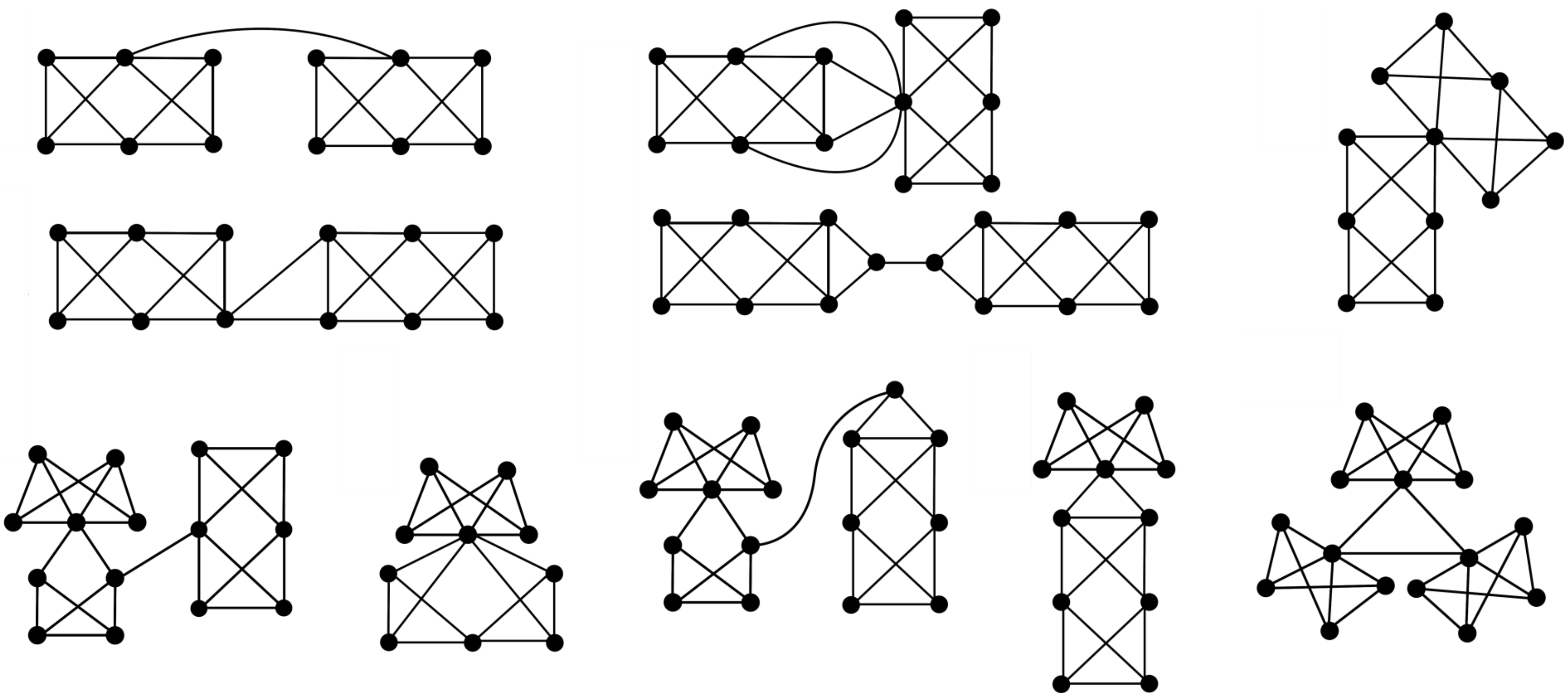
a nunca irá compor S.



b e c ambos só podem pertencer a S, e nenhum outro mais.

DH: MUITOS PROIBIDOS

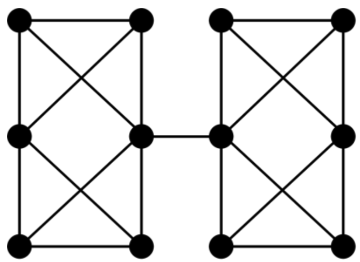
- Na verdade, listando apenas poucos!



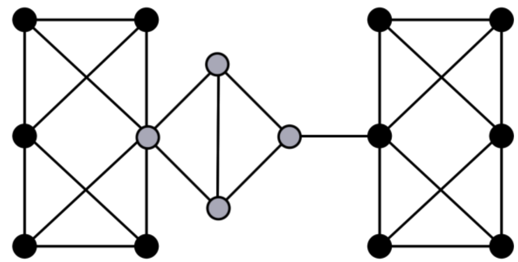
DH: MUITOS, MUITOS MESMO!

- Existem infinitos subgrafos proibidos para DH.

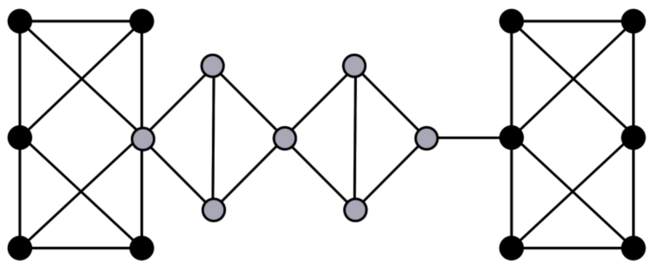
F_0



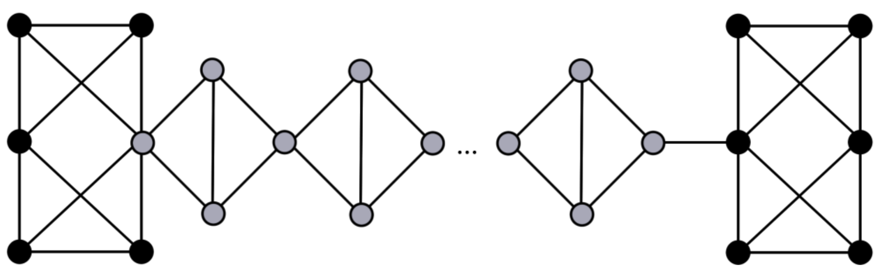
F_1



F_2



F_k

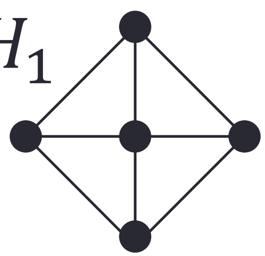


DH: UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE

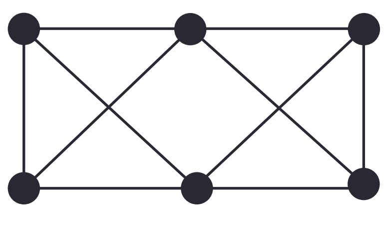
Teorema

Seja G um grafo DH que não contém H_1,H_2 e K_4 como subgrafos induzidos, então G admite uma quase-bipartição (S, F).

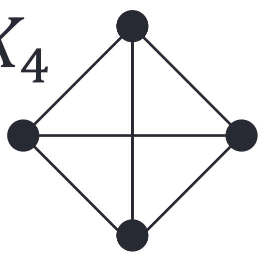
H_1



H_2



K_4



Mas antes...

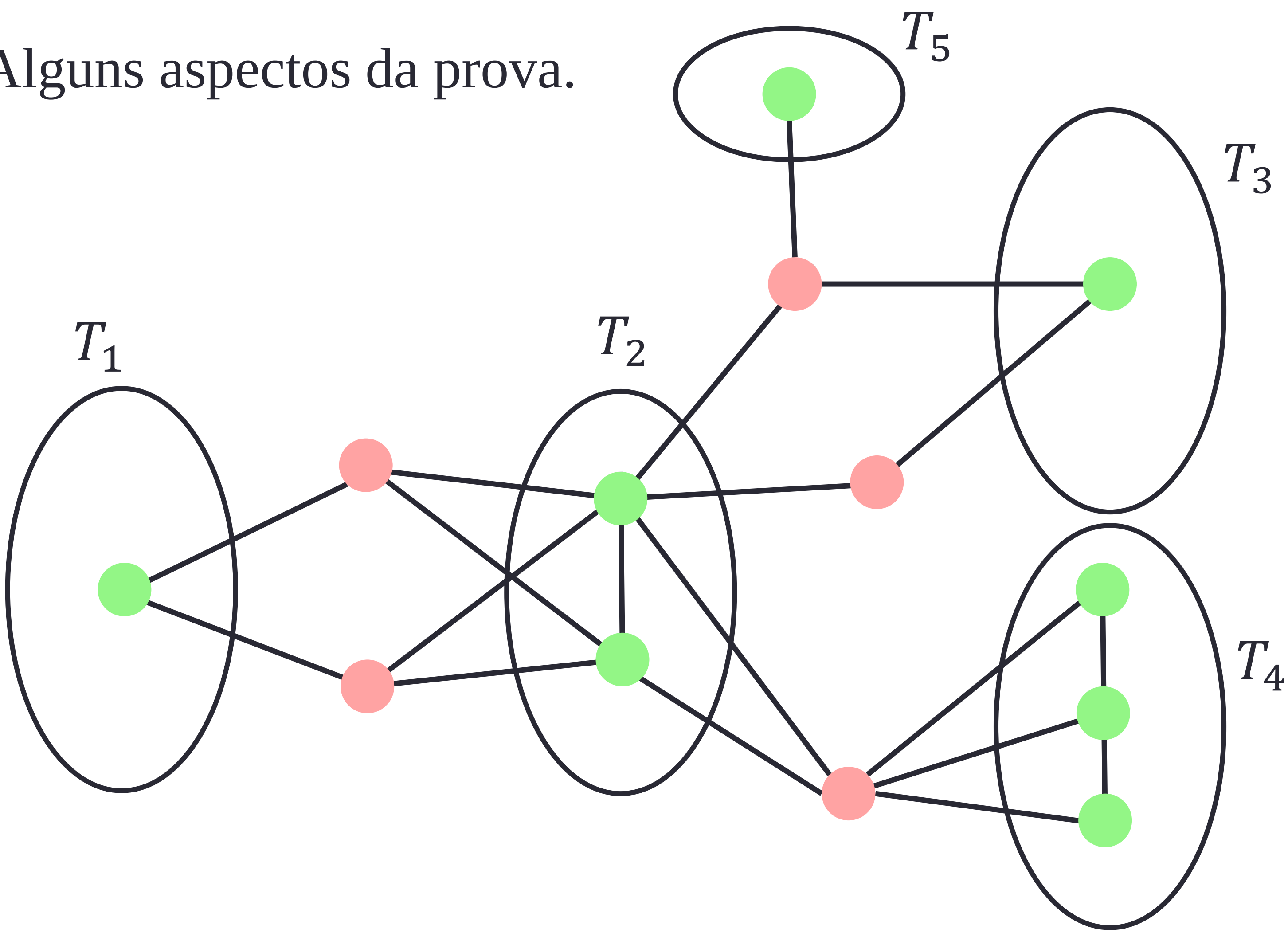
DH: MUDANDO NOS ESTÁVEIS

Lema 1

Sejam G um grafo DH com uma quase-bipartição conhecida (S,F) e $S' \subseteq S$, tal que ou $|S'| = 1$ ou qualquer par de vértices de S' possui distância 2 em G. Se G não contém H_1 e nem H_2 como subgrafos induzidos, então existe uma outra quase-bipartição (S'', F''), onde $S' \subseteq F''$.

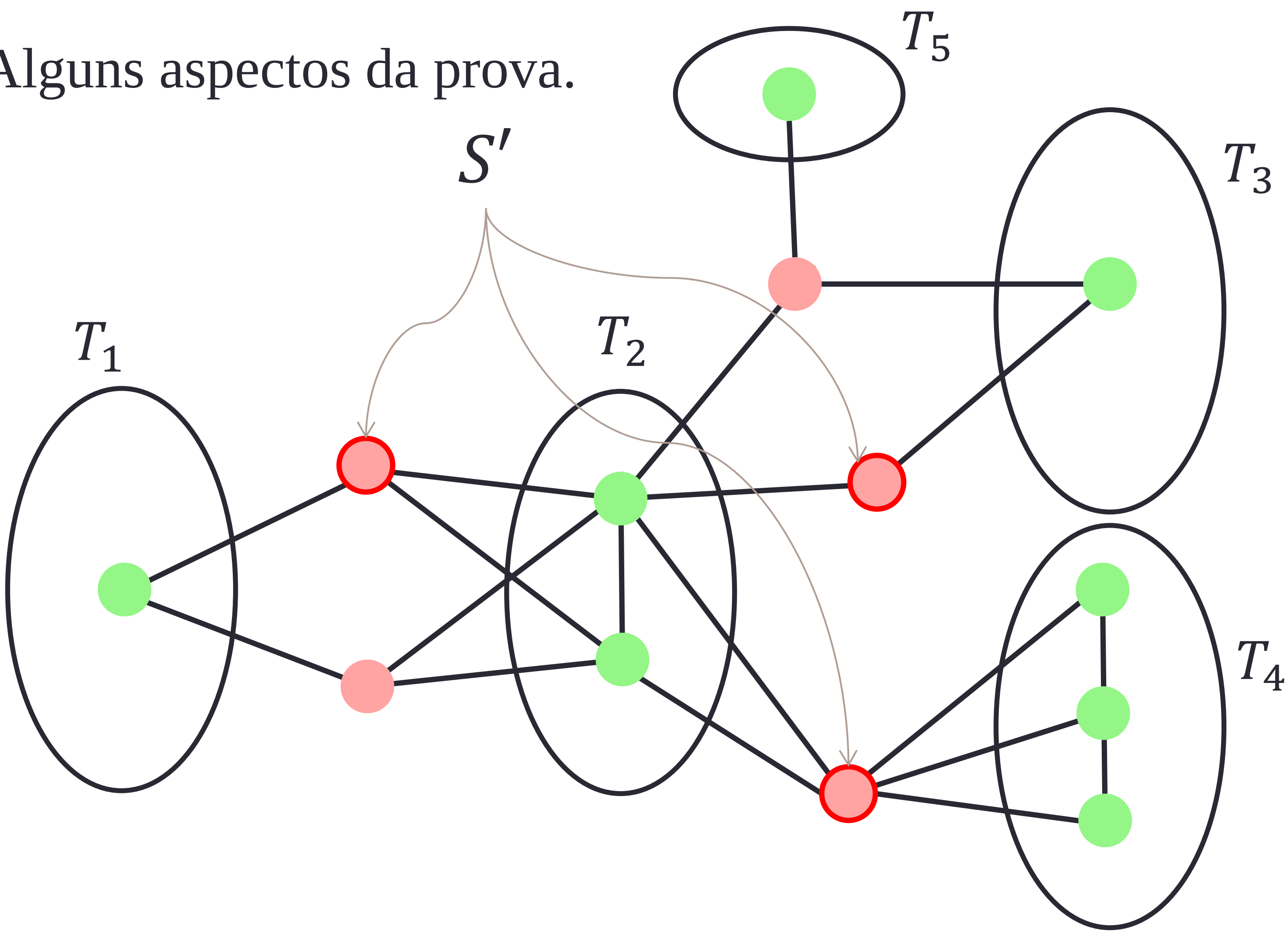
DH: PROVA DO LEMA 1

Alguns aspectos da prova.



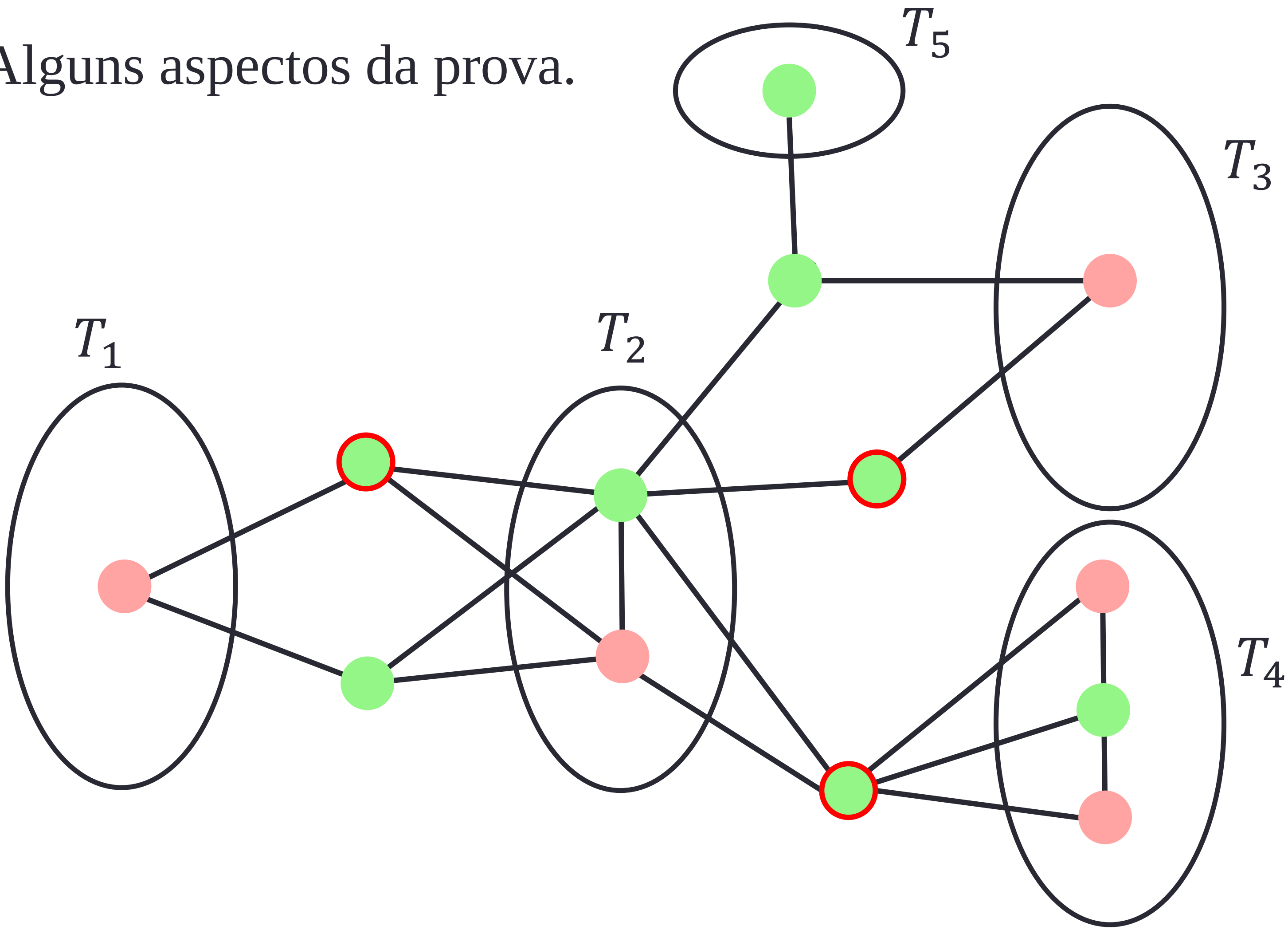
DH: PROVA DO LEMA 1

Alguns aspectos da prova.



DH: PROVA DO LEMA 1

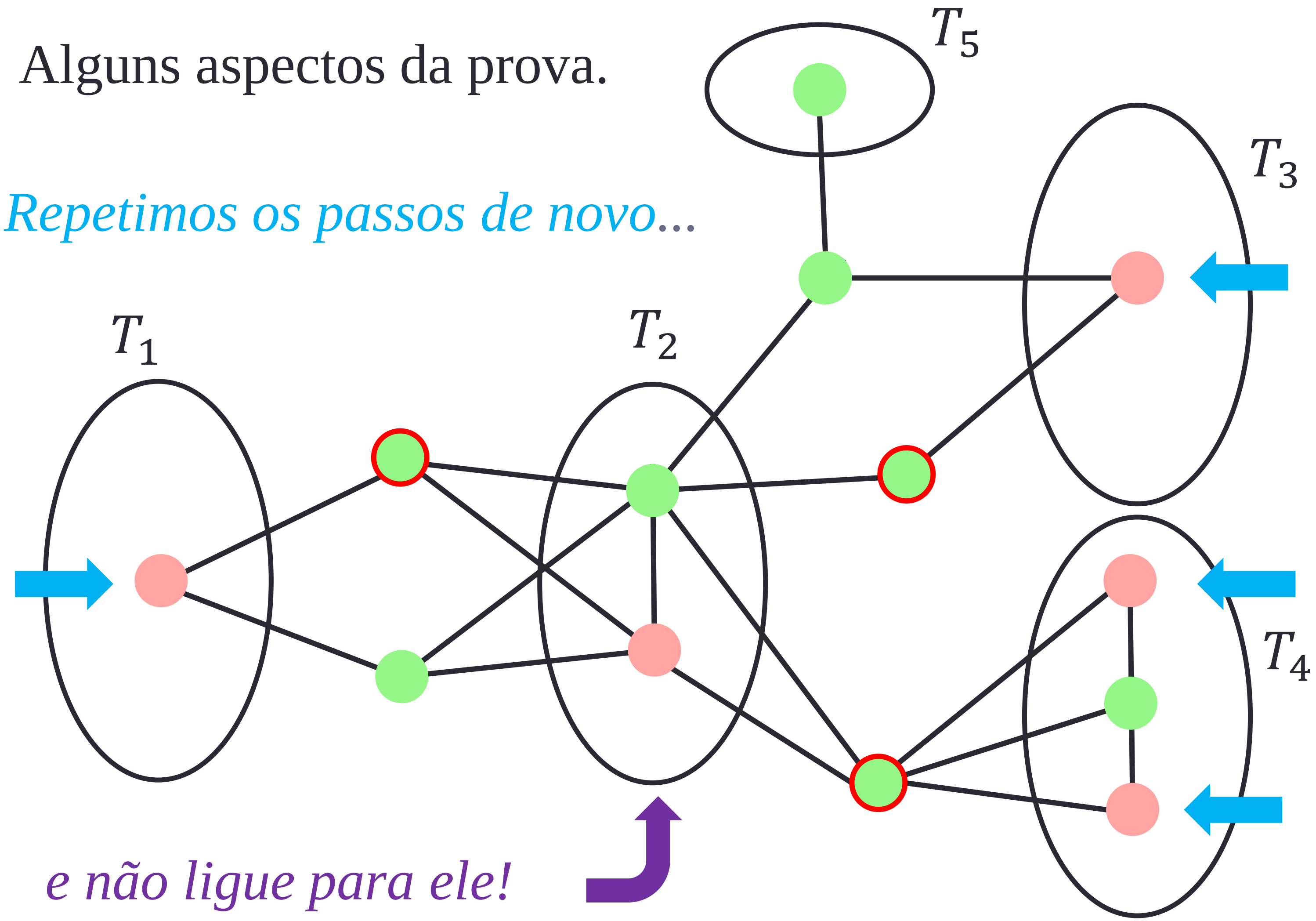
Alguns aspectos da prova.



DH: PROVA DO LEMA 1

Alguns aspectos da prova.

Repetimos os passos de novo...



e não ligue para ele!

DH: MUDANDO NOS ACÍCLICOS

Lema 2

Sejam G um grafo DH com uma quase-bipartição conhecida (S,F) e $F' \subseteq F$, tal que ou $|F'| = 1$ ou qualquer par de vértices de F' possui distância 2 em G. Se G não contém H_2 e nem H_2 como subgrafos induzidos, então existe uma outra quase-bipartição (S'', F''), onde $F' \subseteq S''$.

A demonstração segue do Lema 1, onde o mesmo é aplicado nos vértices estáveis na vizinhança de F'.

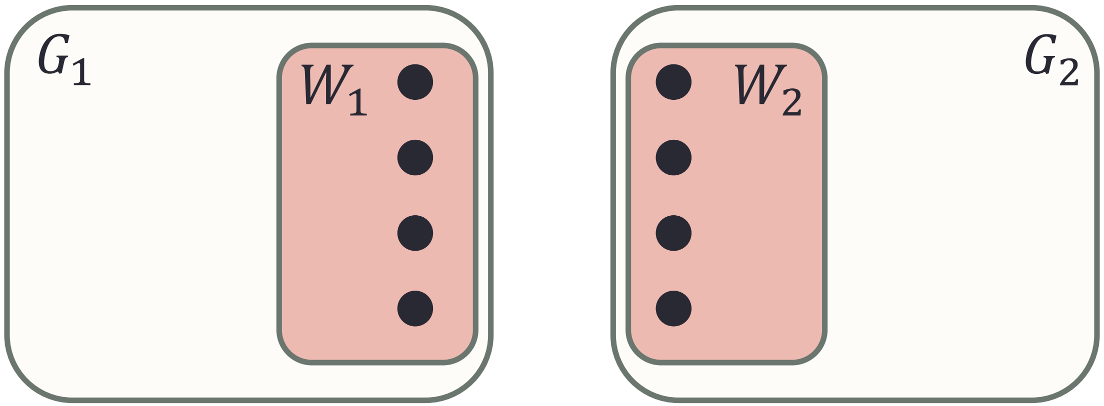
DH: ÁRVORE DE DECOMPOSIÇÃO

Por Chang et al. (1997), considere G_1 e G_2 grafos DH com subconjuntos de vértices W_1 e W_2 chamados ***conjuntos gêmeos***, respectivamente. Três operações são definidas:

$\otimes$: *Operação Gêmeo Verdadeiro;*

$\oplus$: *Operação Anexar;*

$\odot$: *Operação Gêmeo Falso.*



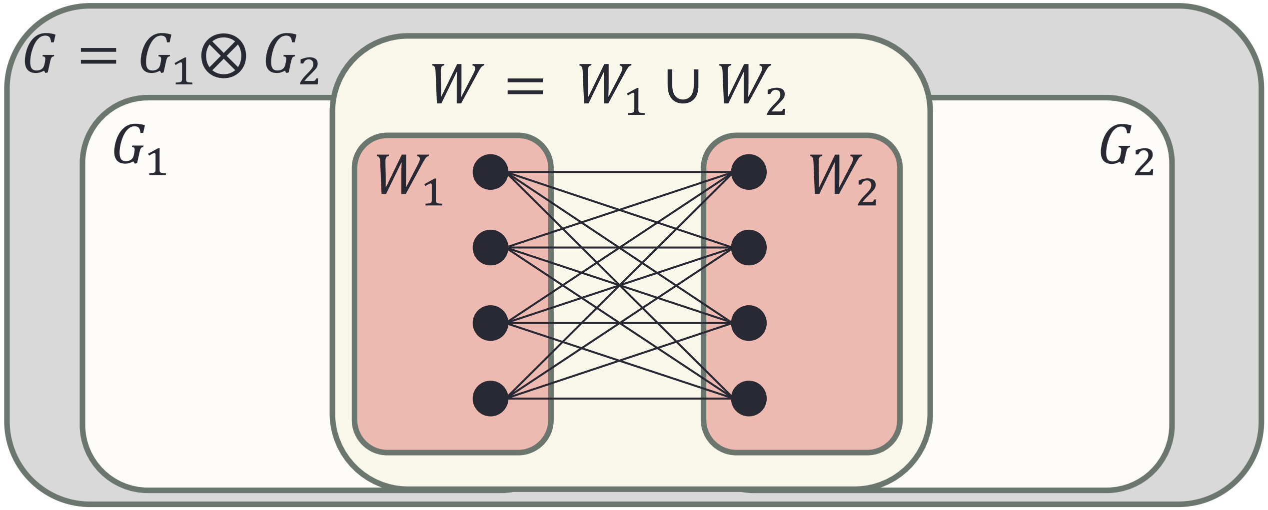
DH: ÁRVORE DE DECOMPOSIÇÃO

Por Chang et al. (1997), considere G_1 e G_2 grafos DH com subconjuntos de vértices W_1 e W_2 chamados ***conjuntos gêmeos***, respectivamente. Três operações são definidas:

$\otimes$: ***Operação Gêmeo Verdadeiro;***

$\oplus$: *Operação Anexar;*

$\odot$: *Operação Gêmeo Falso.*



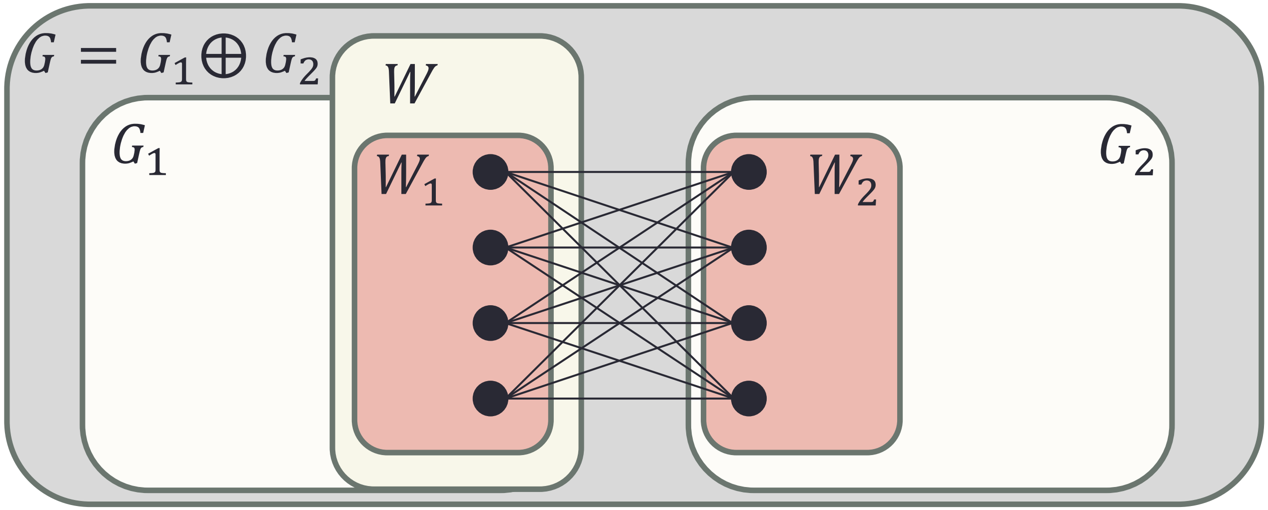
DH: ÁRVORE DE DECOMPOSIÇÃO

Por Chang et al. (1997), considere G_1 e G_2 grafos DH com subconjuntos de vértices W_1 e W_2 chamados ***conjuntos gêmeos***, respectivamente. Três operações são definidas:

$\otimes$: *Operação Gêmeo Verdadeiro;*

$\oplus$***: Operação Anexar;***

$\odot$: *Operação Gêmeo Falso.*



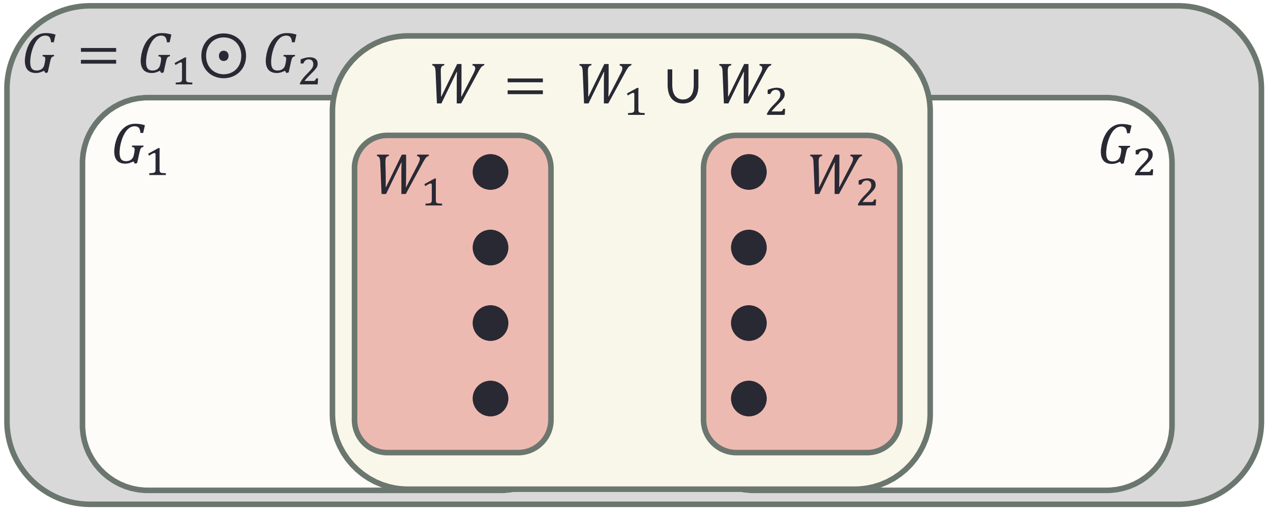
DH: ÁRVORE DE DECOMPOSIÇÃO

Por Chang et al. (1997), considere G_1 e G_2 grafos DH com subconjuntos de vértices W_1 e W_2 chamados ***conjuntos gêmeos***, respectivamente. Três operações são definidas:

$\otimes$: *Operação Gêmeo Verdadeiro;*

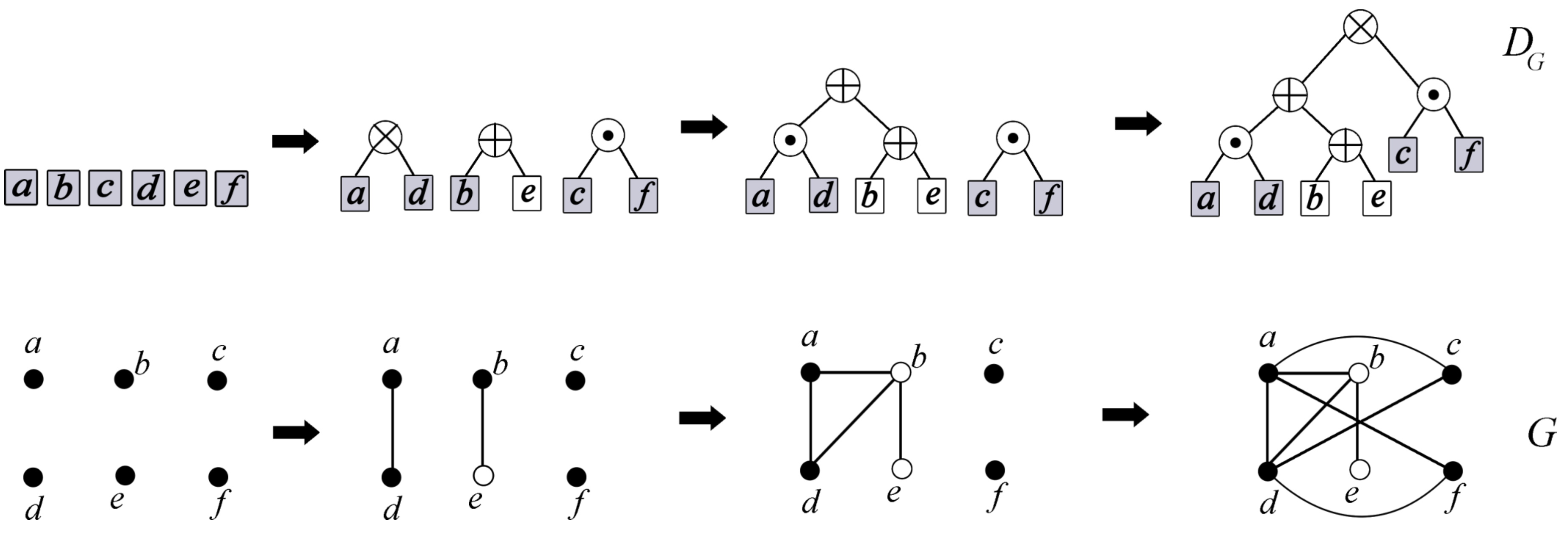
$\oplus$: *Operação Anexar;*

$\odot$: ***Operação Gêmeo Falso.***



DH: ÁRVORE DE DECOMPOSIÇÃO

- Qualquer grafo DH pode ser representado da forma de árvore binária fazendo uso das operações anteriores.



DH: PROVA DO TEOREMA

Teorema

Seja G um grafo DH que não contém H_1,H_2 e K_4 como subgrafos induzidos, então G admite uma quase-bipartição (S, F).

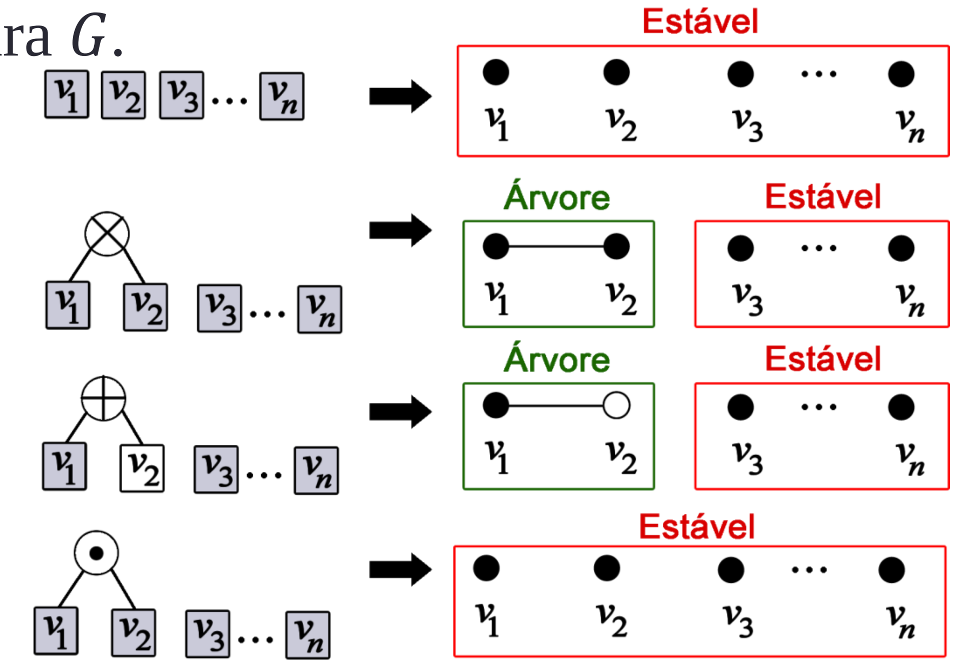
DH: PROVA DO TEOREMA

Teorema

Seja G um grafo DH que não contém H_1, H_2 e K_4 como subgrafos induzidos, então G admite uma quase-bipartição (S, F).

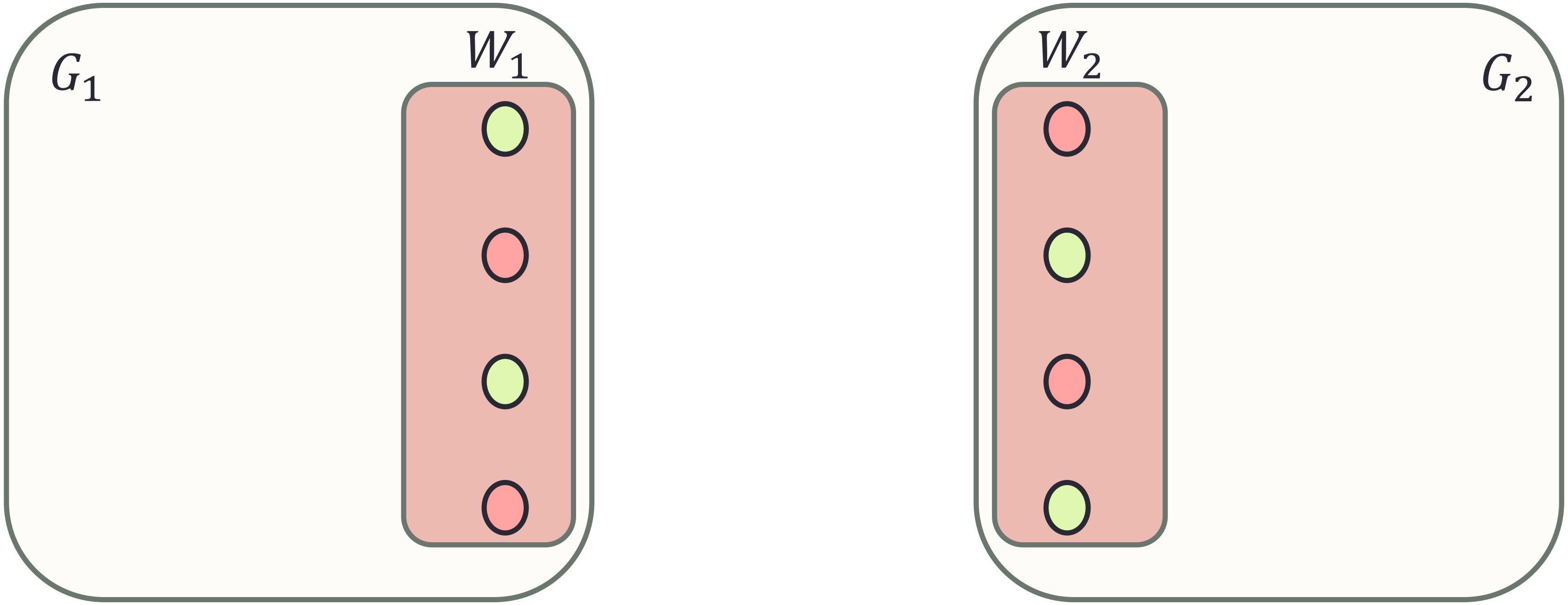
Prova: Por indução no número de operações de uma árvore de composição para G.

Base de indução:



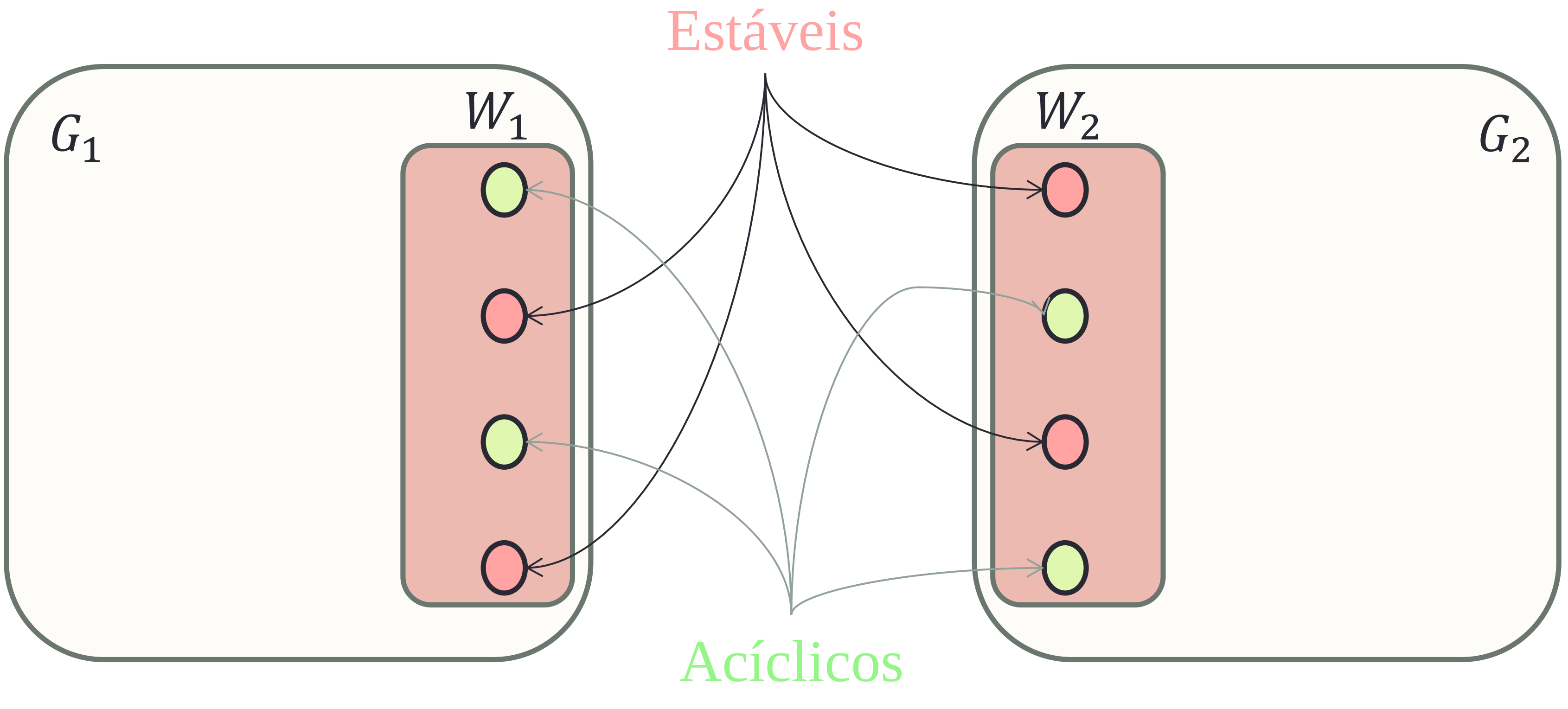
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$



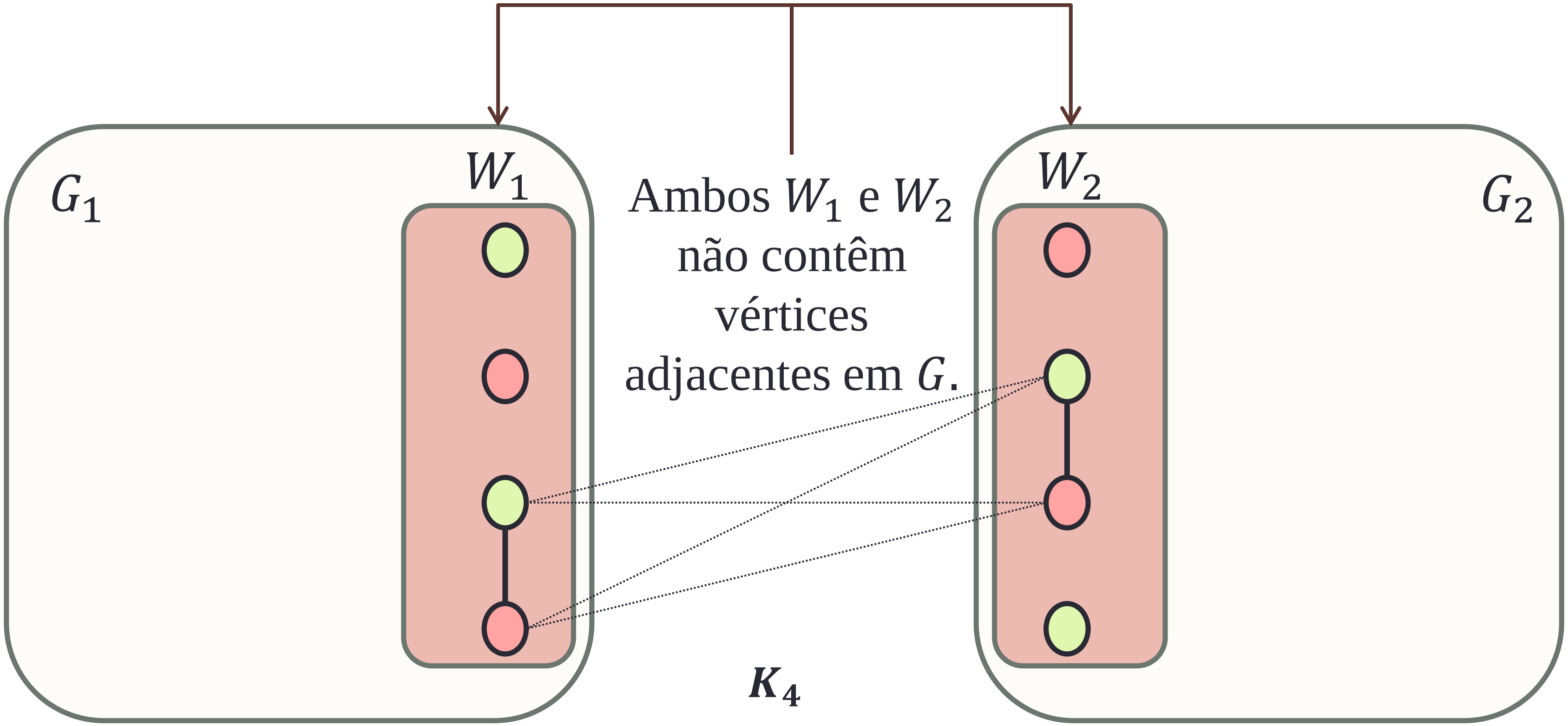
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$



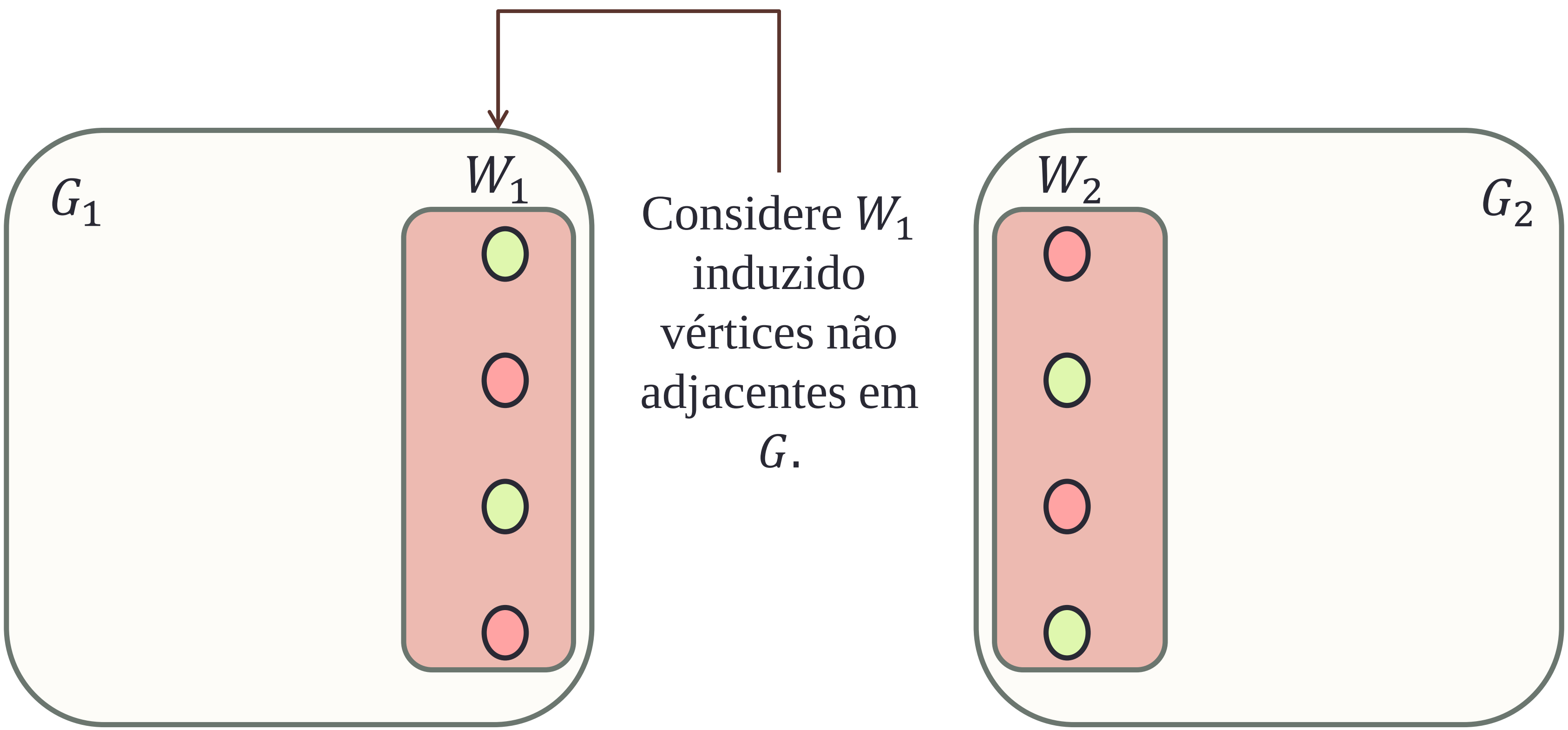
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$



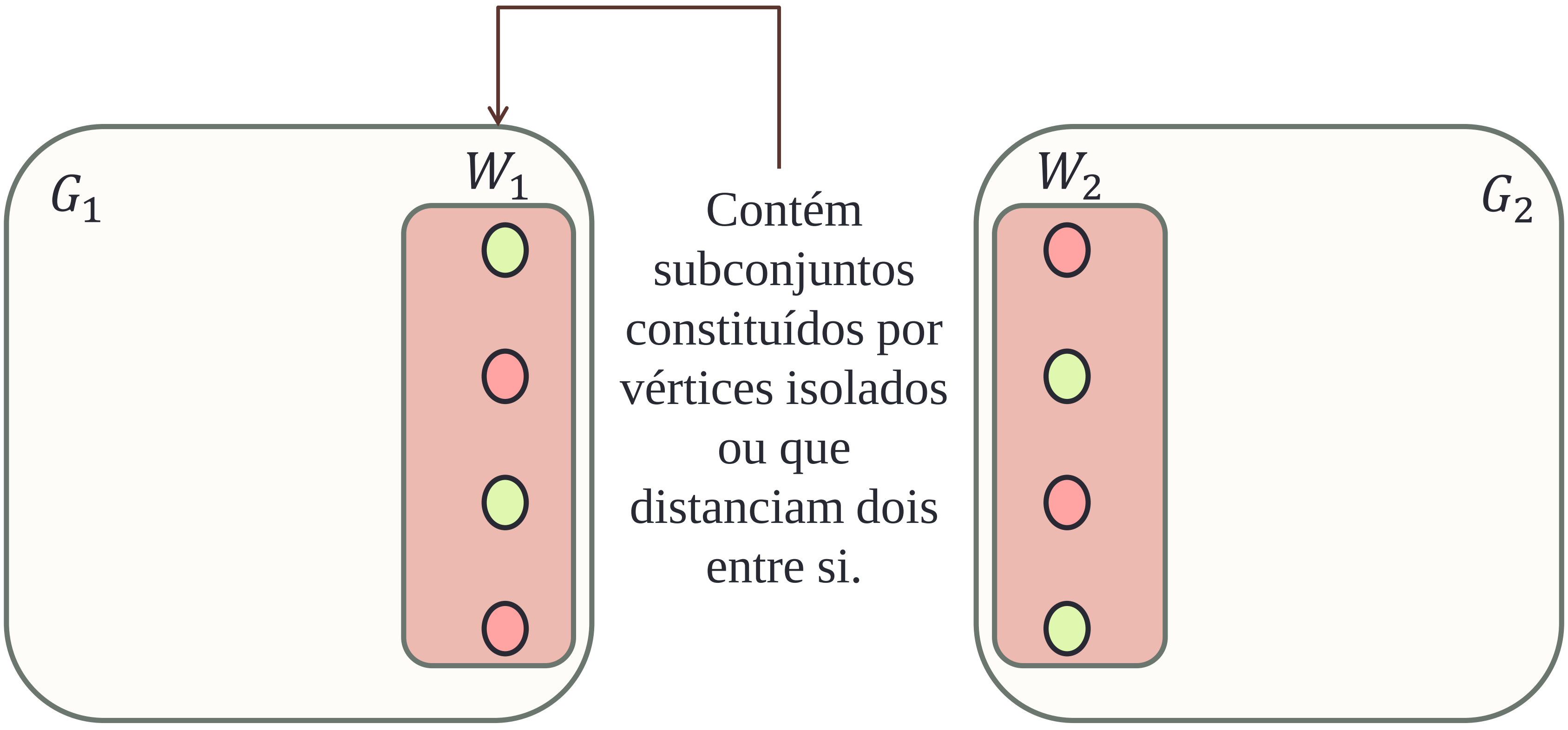
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$



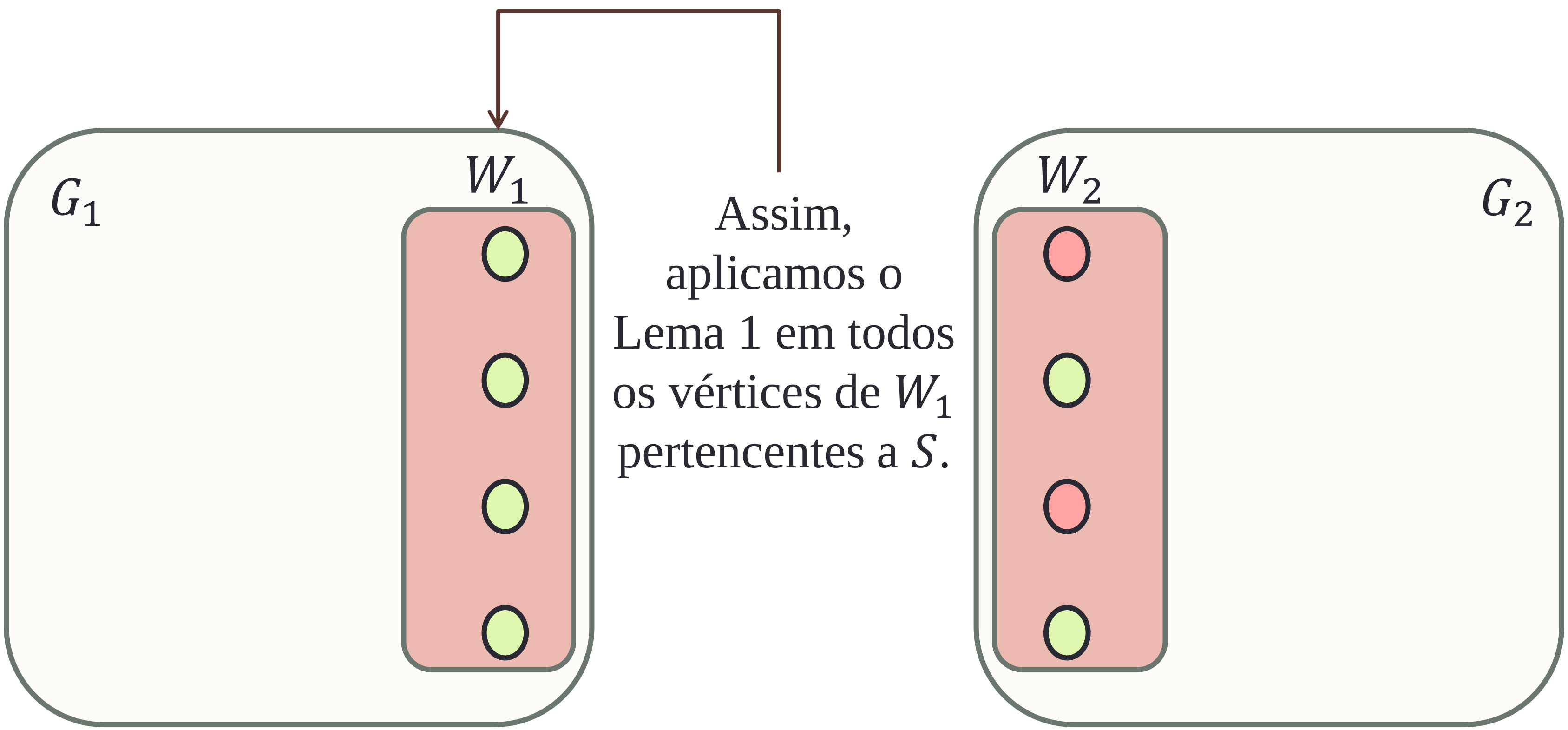
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$



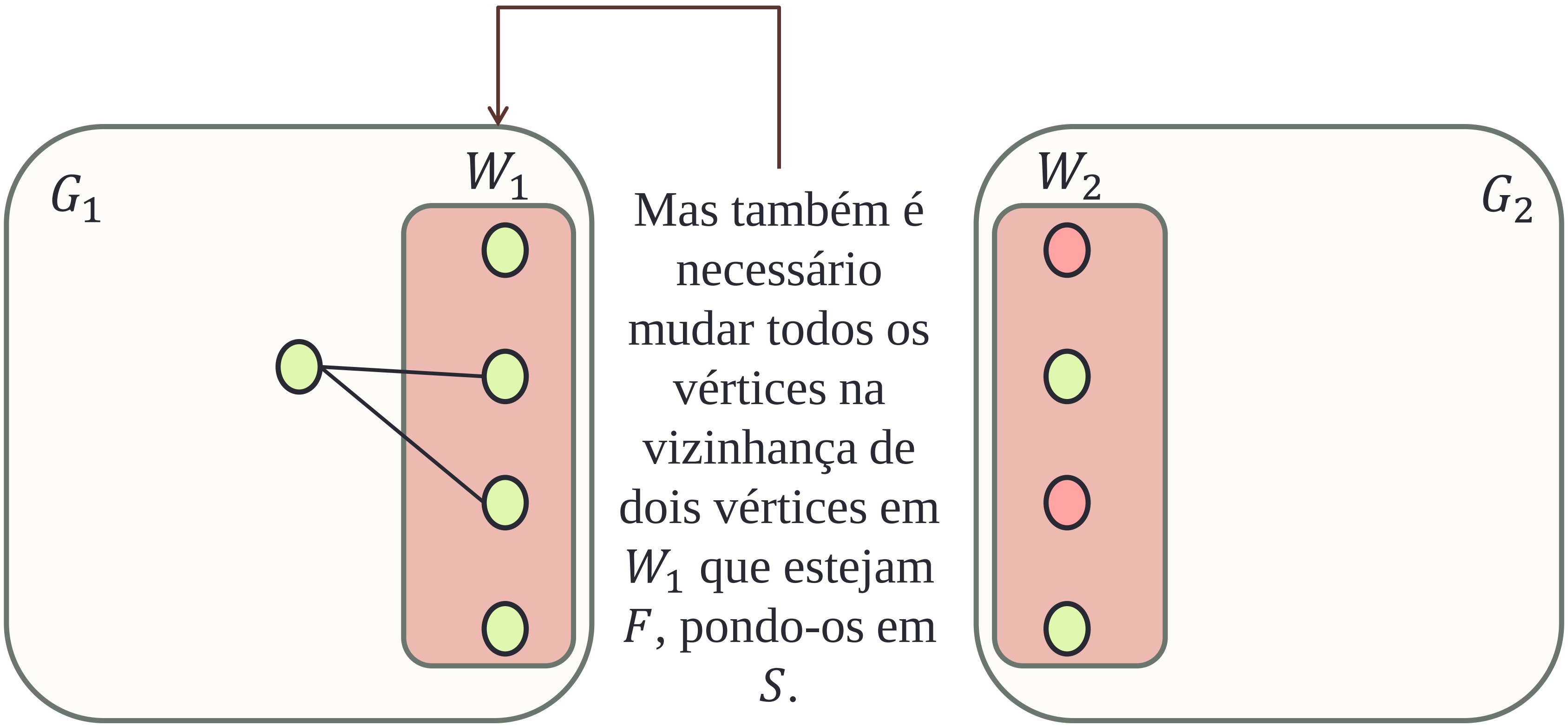
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$



DH: PROVA DO TEOREMA

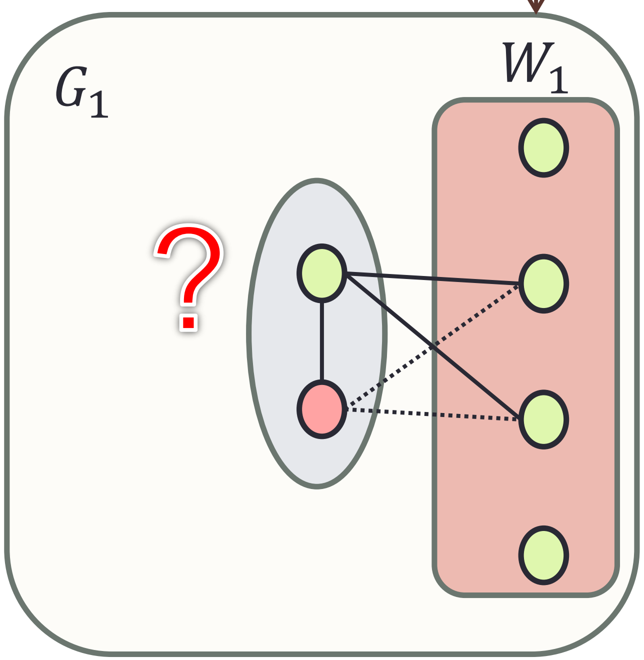
Passo indutivo: Última operação $\otimes$



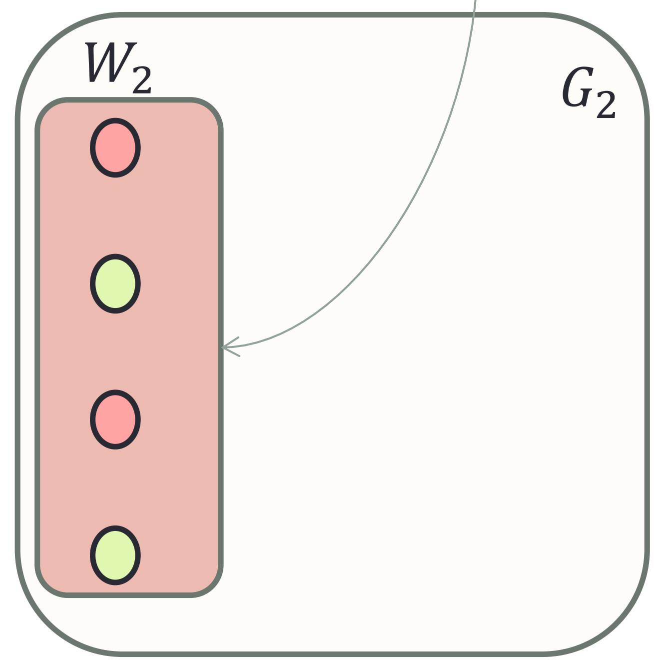
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$

Com alguma aresta teríamos $\boldsymbol{H_2}$.

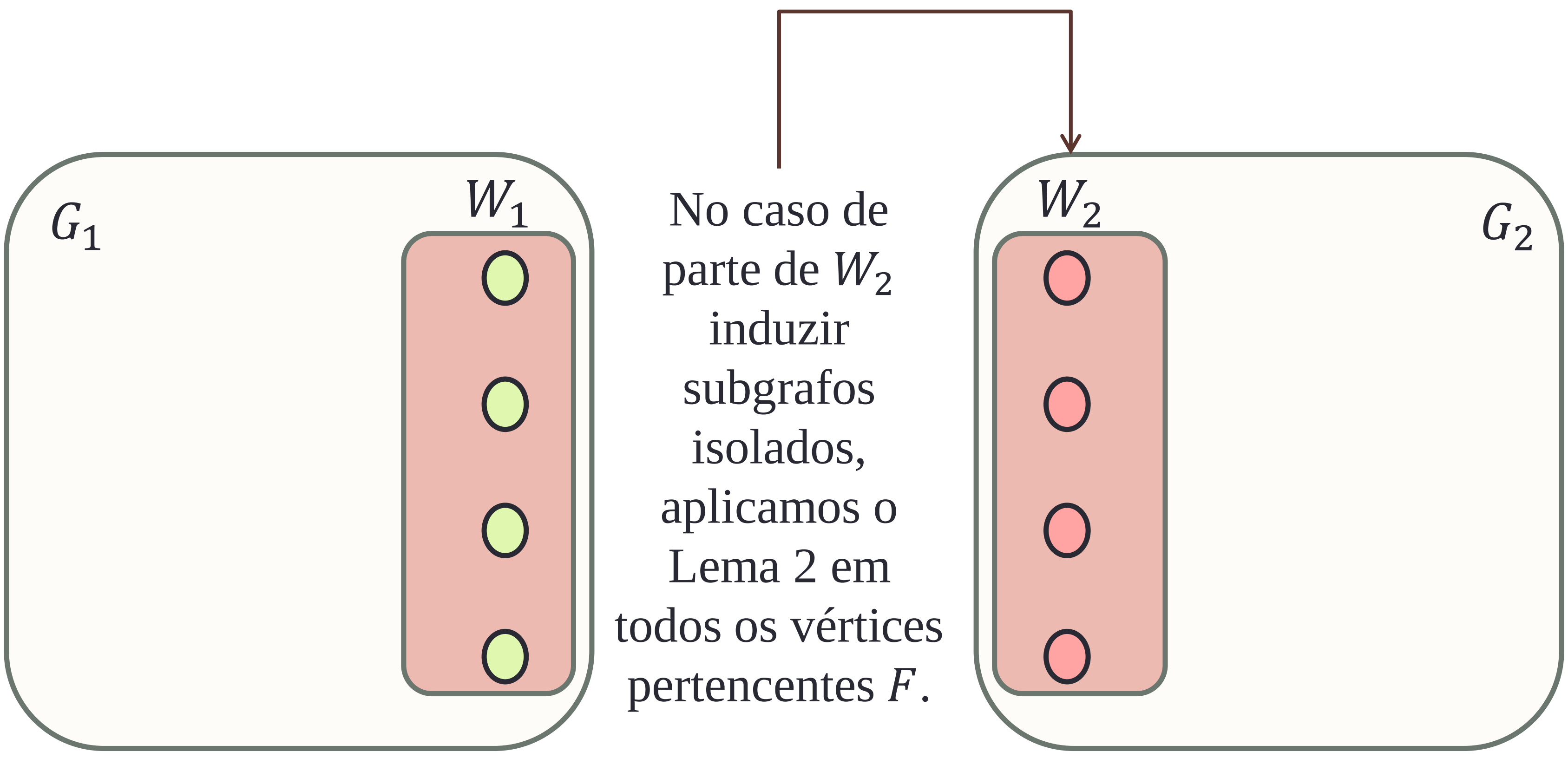


Mas se não for possível, temos W_2 induzindo subgrafo sem aresta e isso é fácil de ser resolvido como veremos



DH: PROVA DO TEOREMA

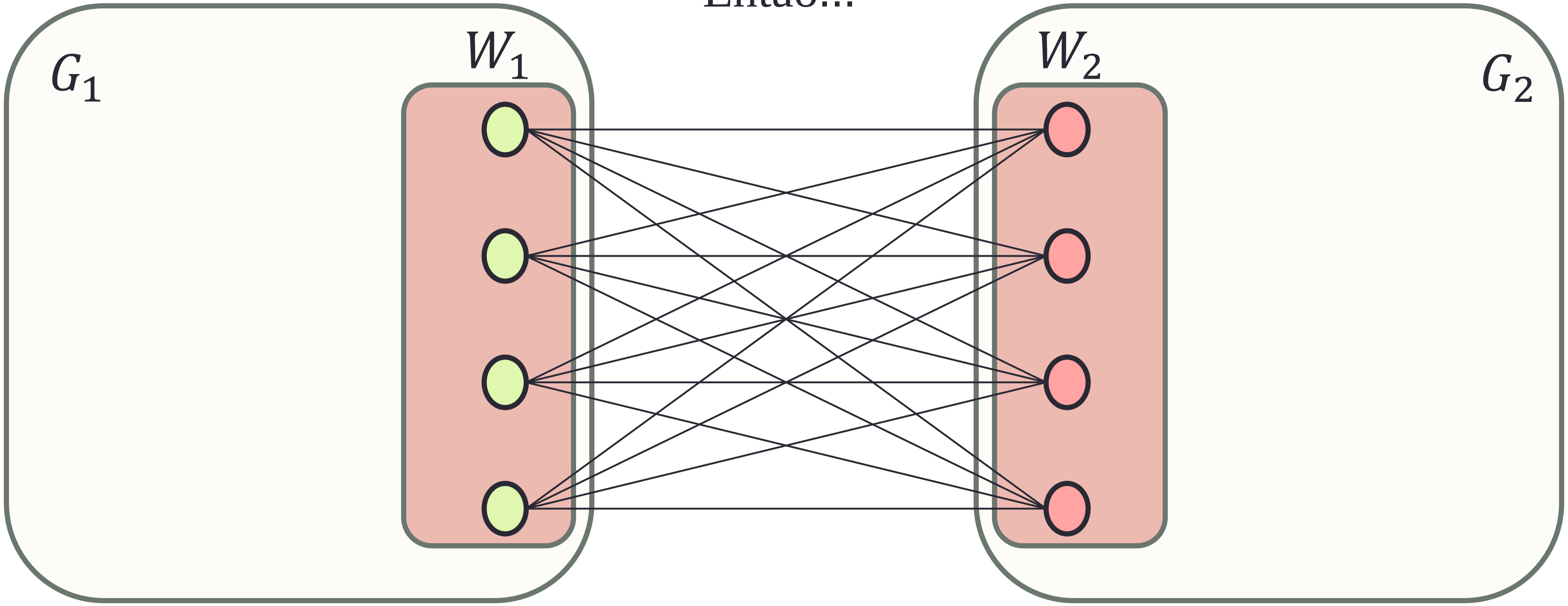
Passo indutivo: Última operação $\otimes$



DH: PROVA DO TEOREMA

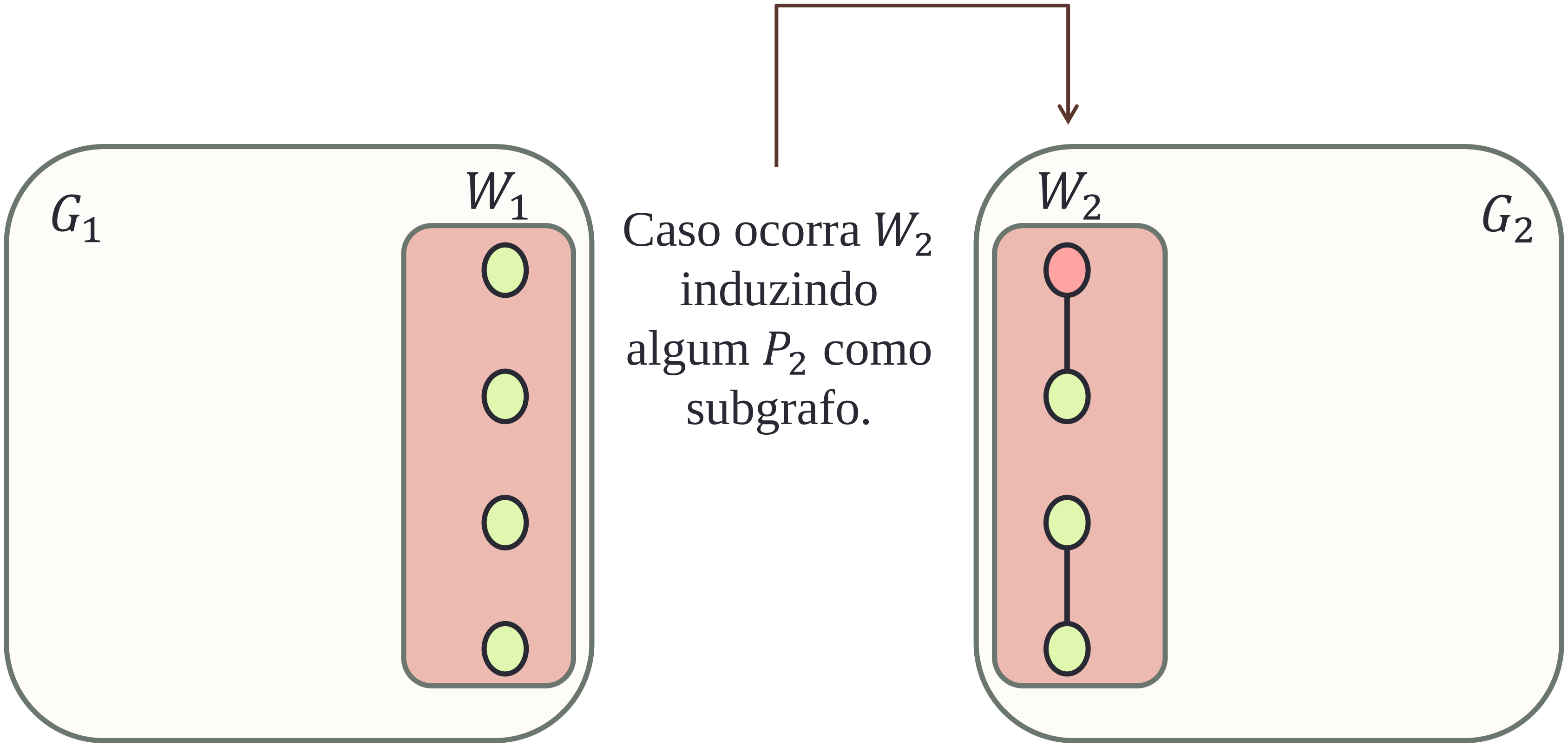
Passo indutivo: Última operação $\otimes$

Então...



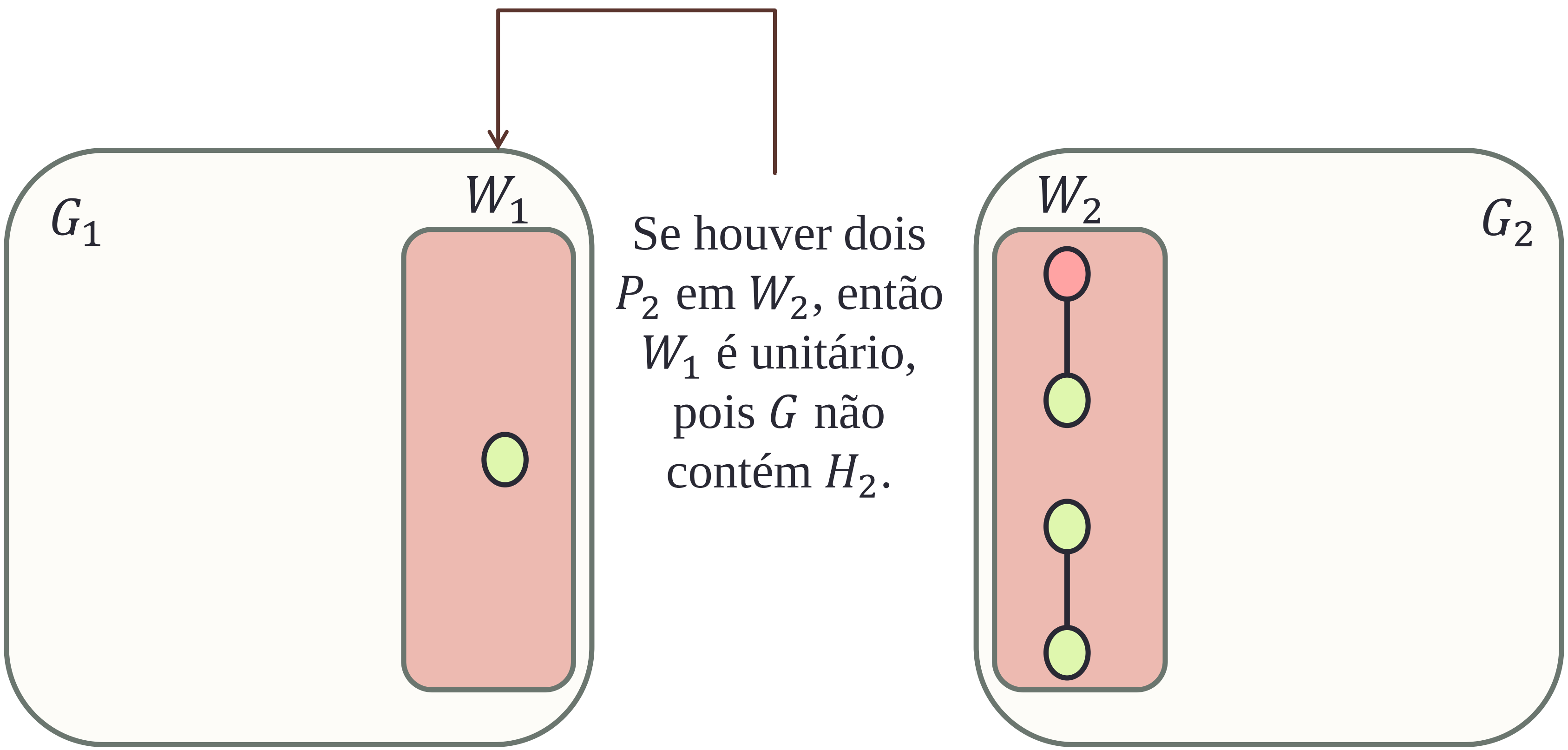
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$



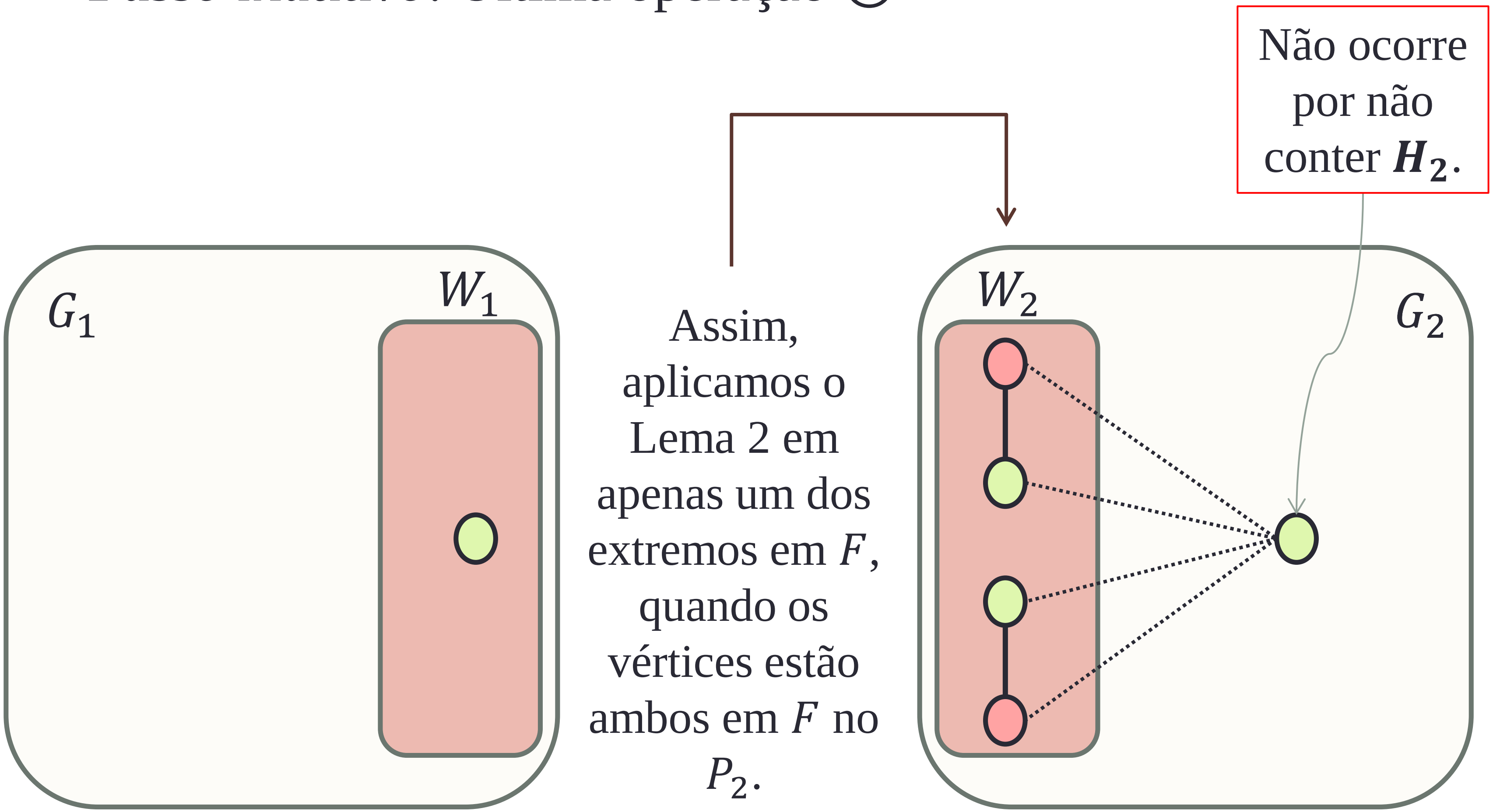
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$



DH: PROVA DO TEOREMA

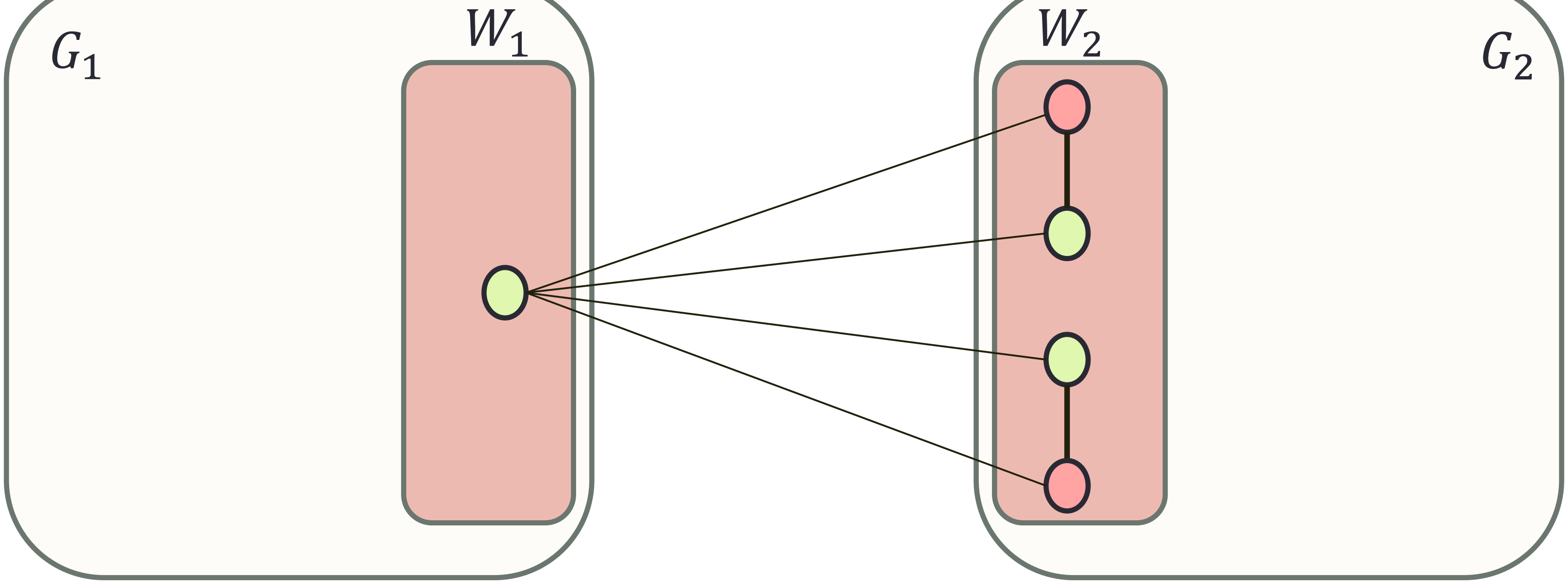
Passo indutivo: Última operação $\otimes$



DH: PROVA DO TEOREMA

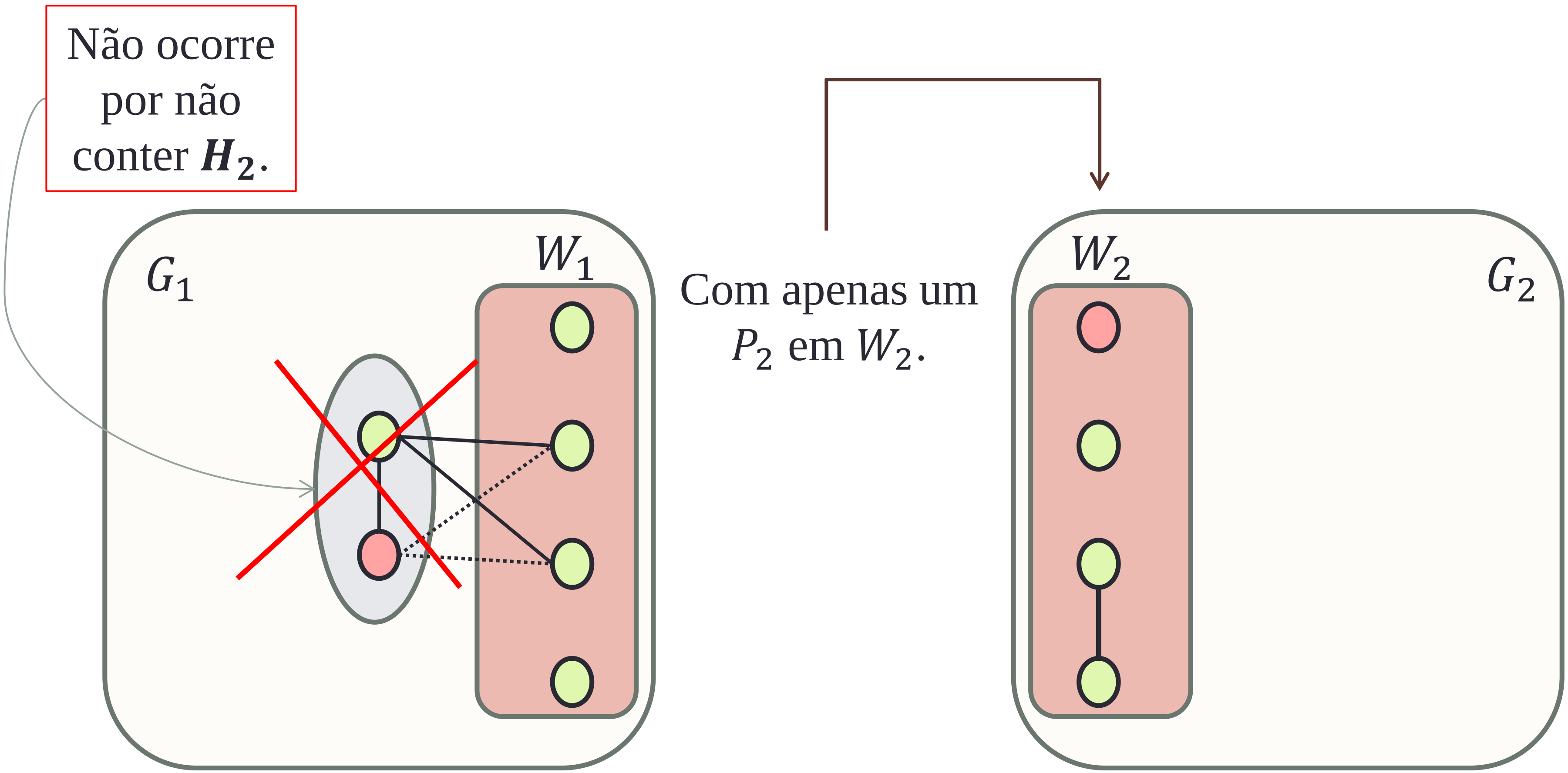
Passo indutivo: Última operação $\otimes$

Então...



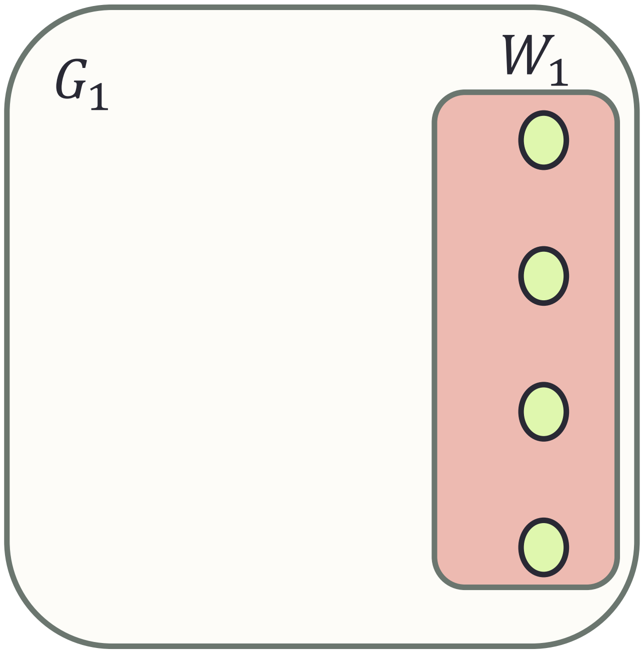
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$

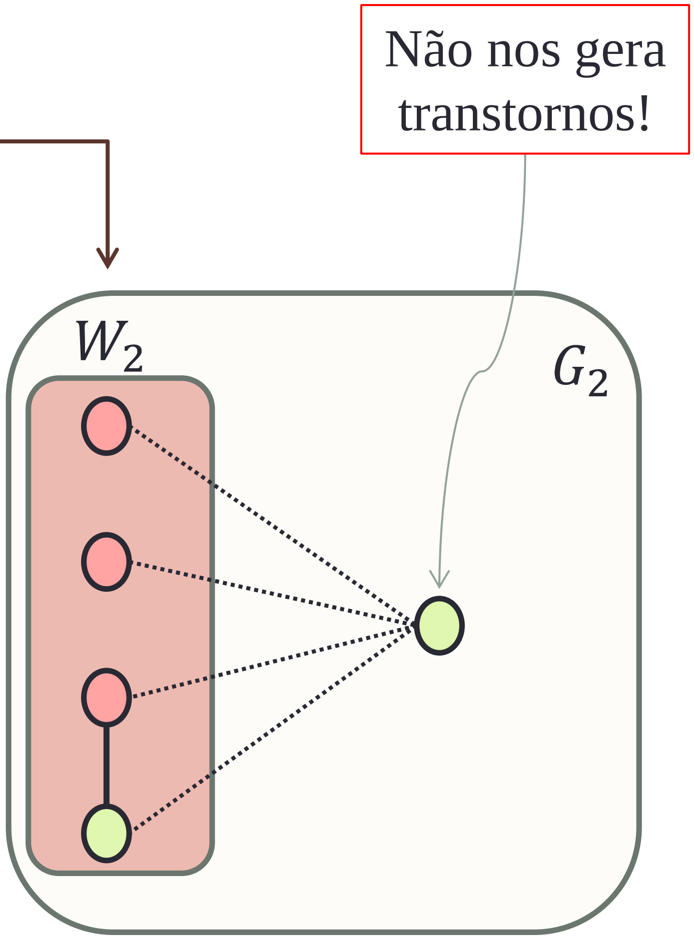


DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$



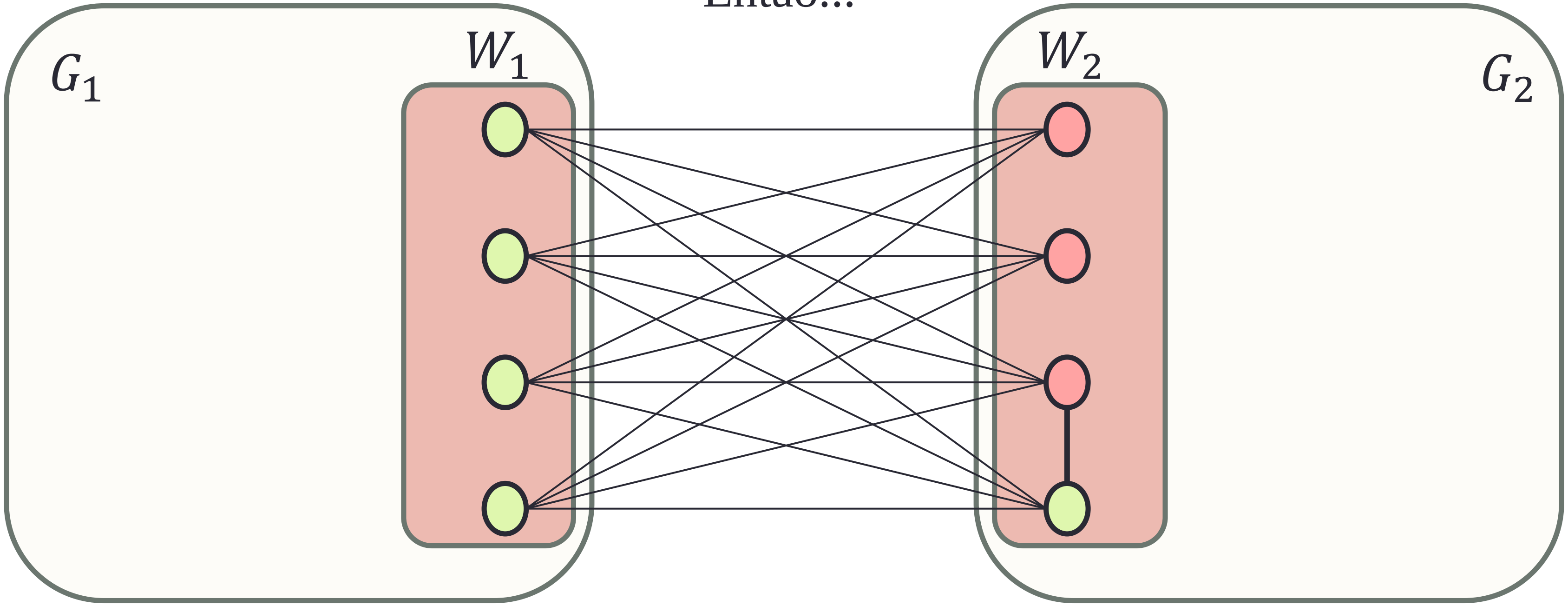
Assim, aplicamos o Lema 2 novamente em apenas um dos extremos em F.



DH: PROVA DO TEOREMA

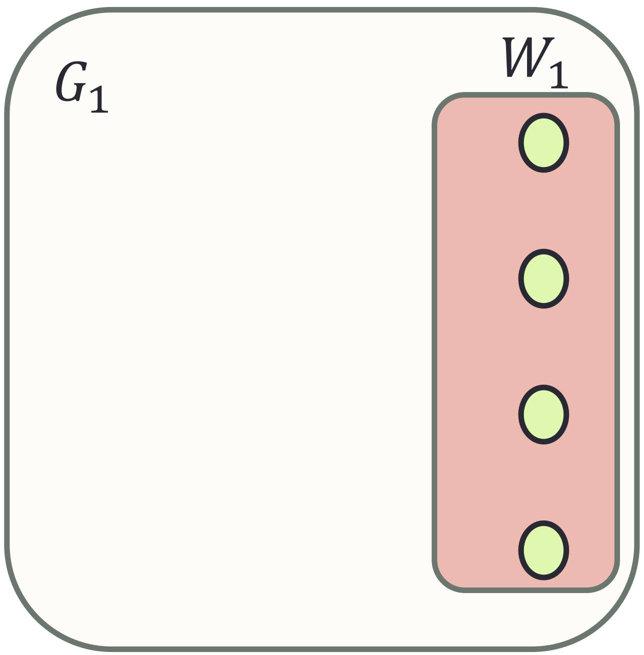
Passo indutivo: Última operação $\otimes$

Então...

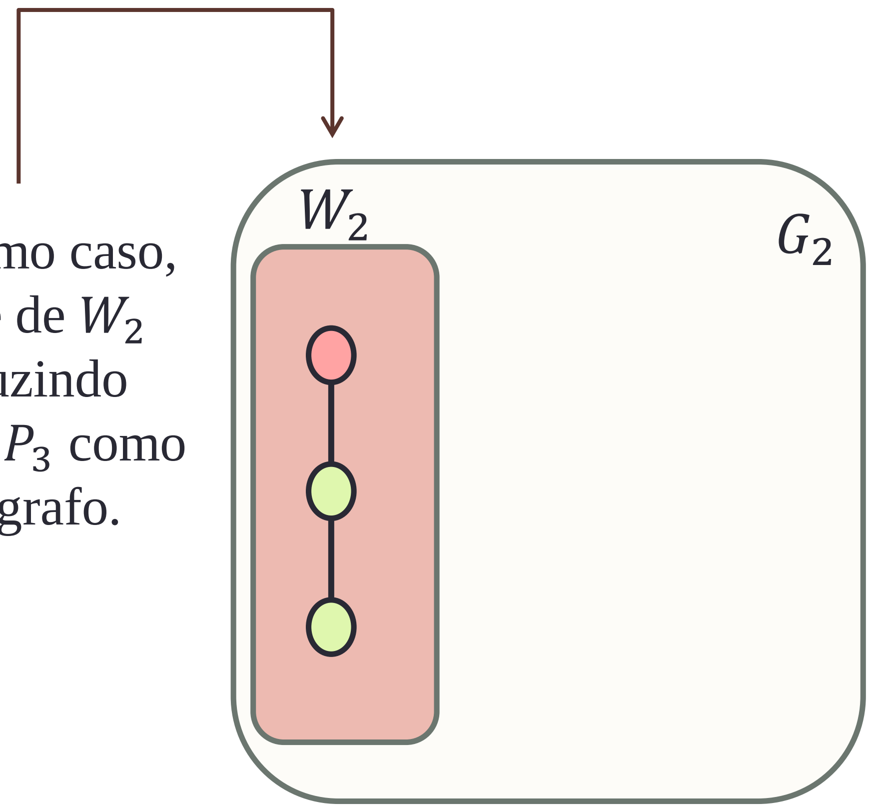


DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$

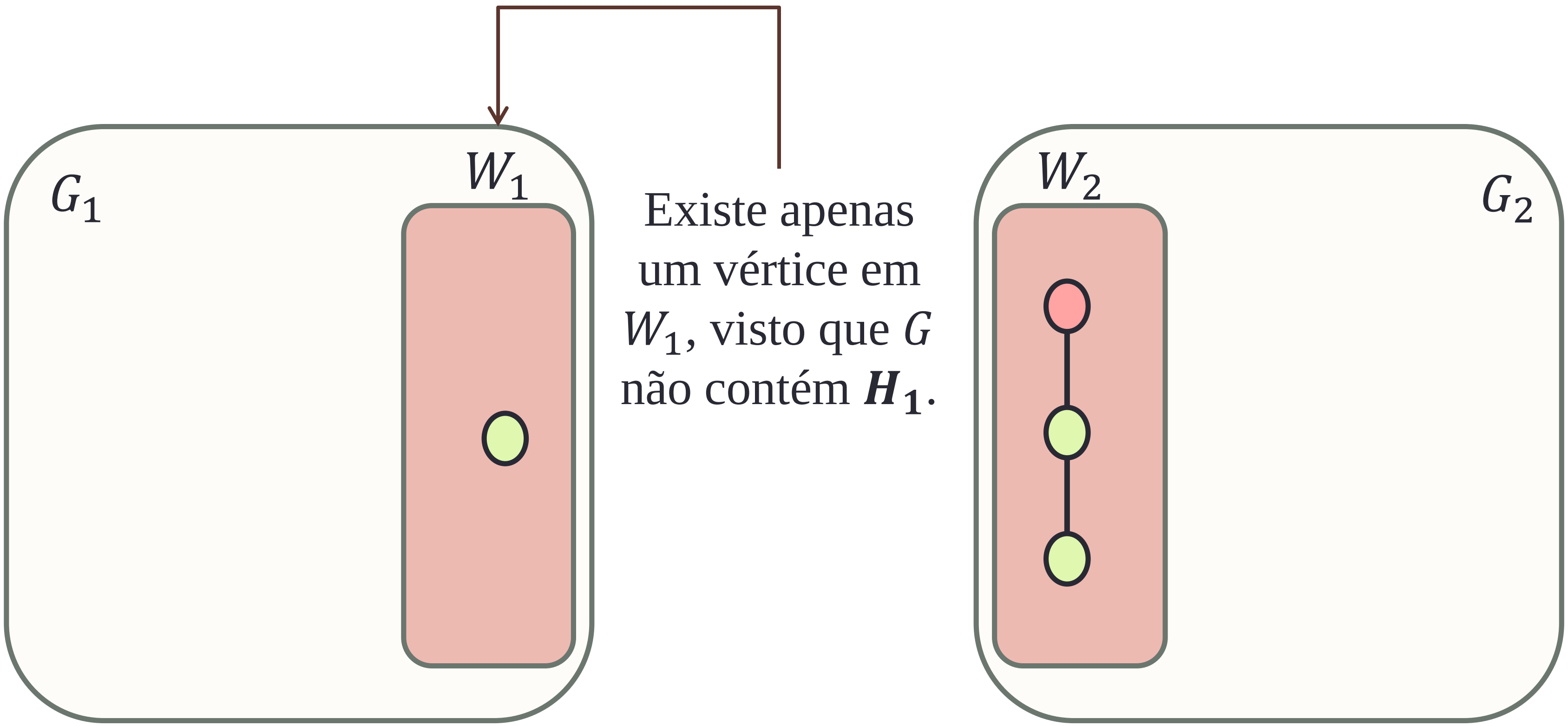


O último caso, parte de W_2 induzindo algum P_3 como subgrafo.



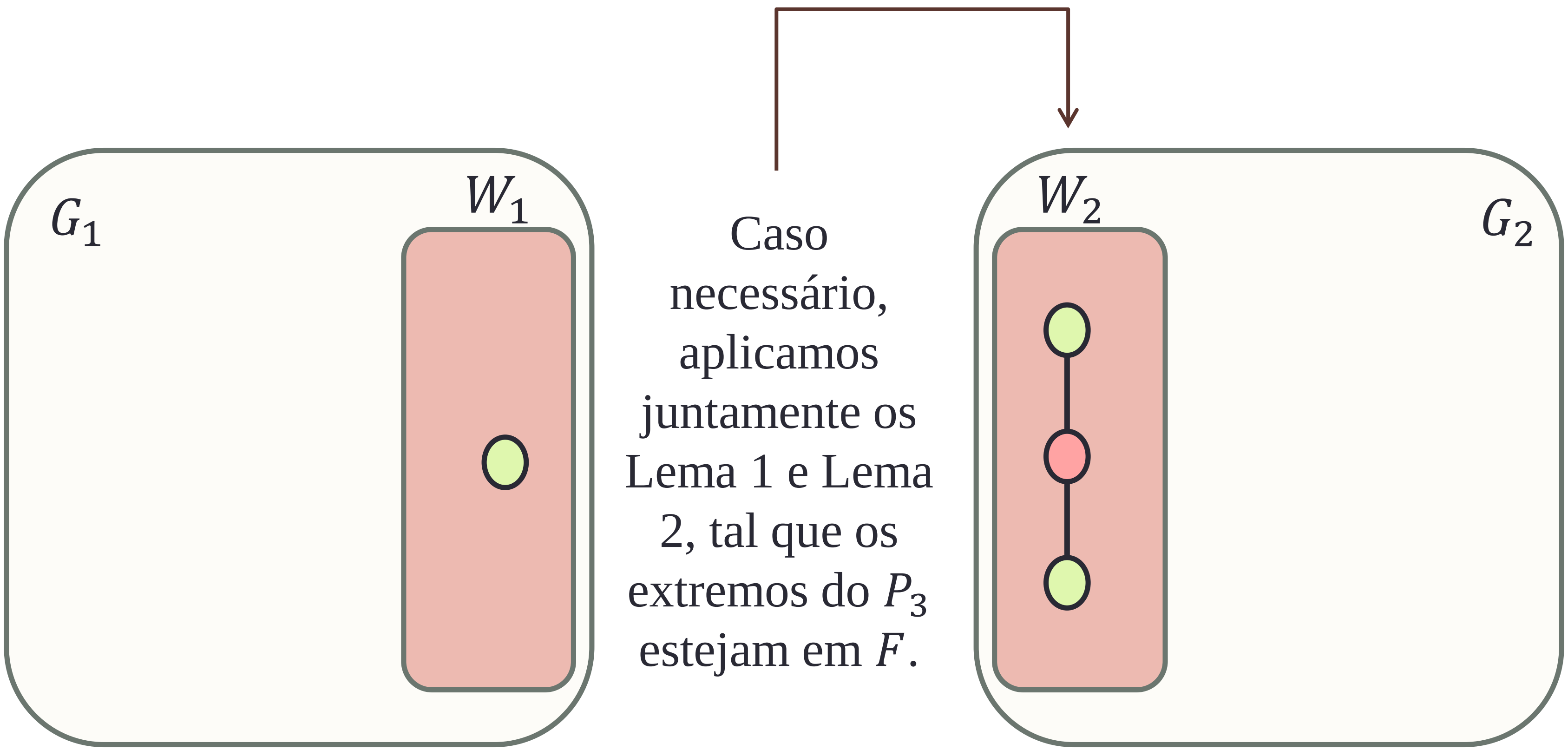
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$



DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$

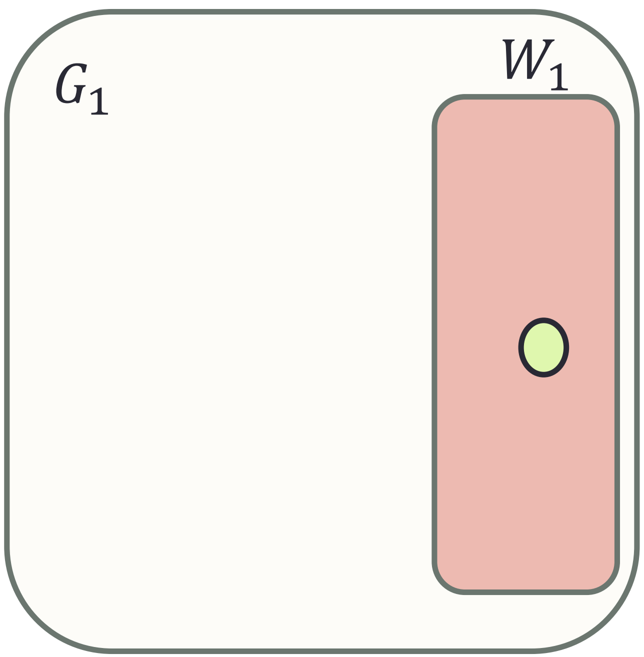


Caso necessário, aplicamos juntamente os Lema 1 e Lema 2, tal que os extremos do P_3 estejam em F.

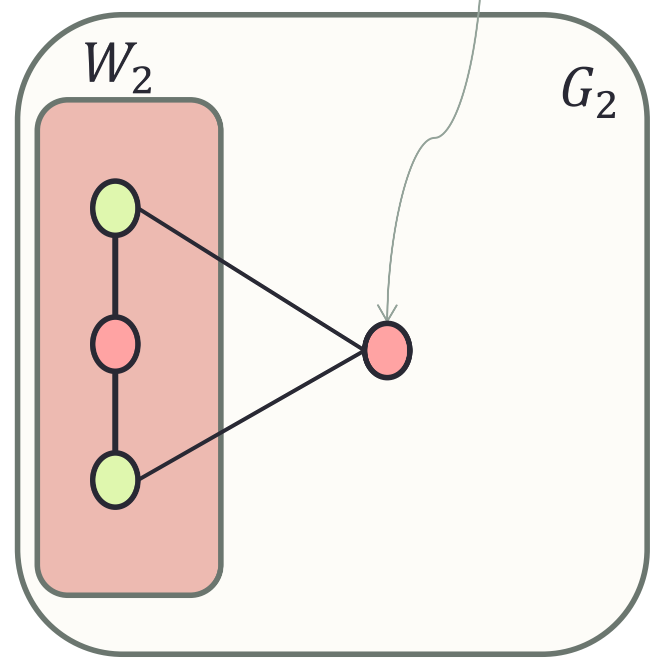
DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$

Não é adjacente a nenhum vértice dos casos anteriores

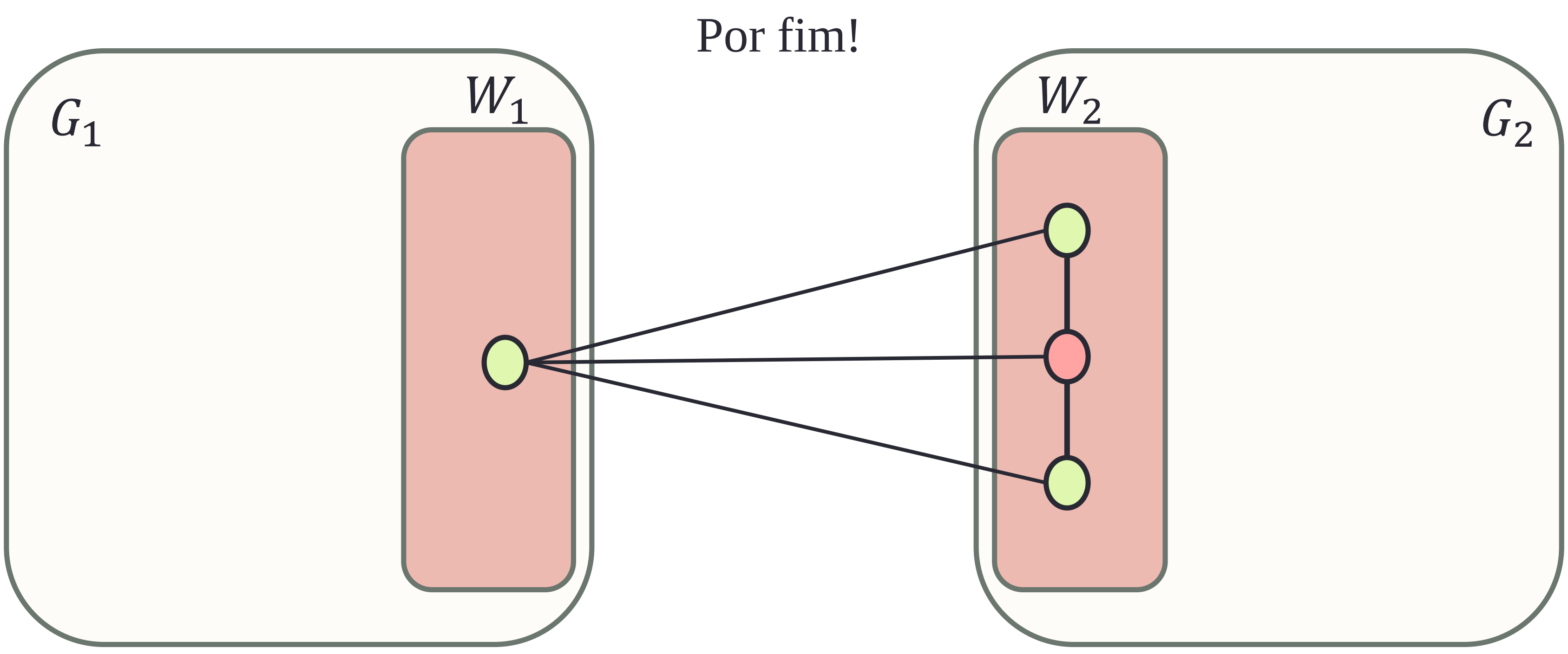


Se algum vértice é adjacente a dois vértices de W_2 em F, nós precisamos mudá-lo com o Lema 2.



DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo: Última operação $\otimes$



DH: PROVA DO TEOREMA

Passo indutivo:

Operação $\oplus$*: Análoga à operação* $\otimes$.

Operação $\odot$*: Fácil!*

Logo, concluímos a prova

CONSIDERAÇÕES FINAIS

- *O problema aparenta ser polinomial para grafos DH, mas são necessários alguns refinamentos para construção do algoritmo;*
- *Estamos pensando na variação problema para esta mesma classe de grafos, que é a quase-bipartição* (S,T), *onde* T *é uma árvore.*

Obrigado!

REFERÊNCIAS DAS PESQUISAS

- Bandelt, H.-J. e Mulder, H. M. (1986). Distance-hereditary graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 41(2):182 – 208.
- Chang, M.-S., Hsieh, S.-y., e Chen, G.-H. (1997). Dynamic programming on distance-hereditary graphs. In Leong, H. W., Imai, H., e Jain, S., editors, Algorithms and Computation, p. 344–353, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- Clauset, A., Newman, M. E. J., e Moore, C. (2004). Finding community structure in very large networks. Phys. Rev. E, 70:066111.
- M. Bonamy, K. K. Dabrowski, C. Feghali, M. Johnson, and D. Paulusma. Independent feedback vertex sets for graphs of bounded diameter. Information Processing Letters, 131:26-32, 2018.
- Cuadros, O., Botelho, G., Rodrigues, F., e Neto, J. B. (2012). Segmentation of large images with complex networks. In Proceedings of the 2012 25th SIBGRAPI Conference on Graphics, Patterns and Images, SIBGRAPI ’12, p. 24–31, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- Davis-Moradkhan, M. e Roucairol, C. (1995). Graph partitioning applied to the logic testing of combinational circuits. Discrete Applied Mathematics, 62(1):131 – 165.

REFERÊNCIAS DAS PESQUISAS

- Engström, C. e Silvestrov, S. (2016). Graph partitioning and a componentwise pagerank algorithm. CoRR, abs/1609.09068.
- Gavril, F. (1972). Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques, and maximum independent set of a chordal graph. SIAM Journal on Computing, 1(2): 180–187.
- Golumbic, M. C. (2004). Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs (Annals of Discrete Mathematics, Vol 57). North-Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands.
- Hammer, P. L. e Maffray, F. (1990). Completely separable graphs. Discrete Applied Mathematics, 27(1):85 – 99.
- Howorka, E. (1977). A characterization of distance-hereditary graphs*. The Quarterly Journal of Mathematics, 28(4):417–420.
- Howorka, E. (1981). A characterization of ptolemaic graphs. Journal of Graph Theory, 5(3): 323–331.
- Kay, D. C. e Chartrand, G. (1965). A characterization of certain ptolemaic graphs. Canadian Journal of Mathematics, 17:342–346.

REFERÊNCIAS DAS PESQUISAS

- Leighton, F. T. (1979). A graph coloring algorithm for large scheduling problems. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 84(6):489–506.
- Raghavan, U. N., Albert, R., e Kumara, S. (2007). Near linear time algorithm to detect community structures in large-scale networks. Phys. Rev. E, 76:036106.
- Yang, A. e Yuan, J. (2006). Partition the vertices of a graph into one independent set and one acyclic set. Discrete Mathematics, 306(12):1207–1216.