Decycling with a Matching

Carlos Vinícius G.C. Lima*

Orientadores:
Jayme L. Szwarcfiter – PESC/COPPE/UFRJ.
Mitre C. Dourado – IM/NCE/UFRJ.
Uéverton dos S. Souza – DC/UFF.

* Partially supported by CAPES and CNPq - Brasil.

24 de abril de 2017

Problemas de Modificação de Grafos

Seja $G = (V, E)$ um grafo e Π uma propriedade sobre grafos, respectivamente. Problemas de Modificação de Grafos são aqueles feitos em $E(G)$ $(V(G))$ de modo a obter um novo grafo satisfazendo Π.

Problemas de Modificação de Grafos

Seja $G = (V, E)$ um grafo e Π uma propriedade sobre grafos, respectivamente. Problemas de Modificação de Grafos são aqueles feitos em $E(G)$ $(V(G))$ de modo a obter um novo grafo satisfazendo Π.

- *Adição* – permite apenas a adição de arestas (vertices).

P. Burzyn, F. Bonomo, and G. Durán
NP-completeness results for edge modification problems.
Discrete Applied Mathematics., 2006.

Problemas de Modificação de Grafos

Seja $G = (V, E)$ um grafo e Π uma propriedade sobre grafos, respectivamente. Problemas de Modificação de Grafos são aqueles feitos em $E(G)$ $(V(G))$ de modo a obter um novo grafo satisfazendo Π.

- *Adição* – permite apenas a adição de arestas (vertices).
- *Deleção* – permite apenas a remoção de arestas (vertices).

P. Burzyn, F. Bonomo, and G. Durán
NP-completeness results for edge modification problems.
Discrete Applied Mathematics., 2006.

Problemas de Modificação de Grafos

Seja $G = (V, E)$ um grafo e Π uma propriedade sobre grafos, respectivamente. Problemas de Modificação de Grafos são aqueles feitos em $E(G)$ $(V(G))$ de modo a obter um novo grafo satisfazendo Π.

- *Adição* – permite apenas a adição de arestas (vertices).
- *Deleção* – permite apenas a remoção de arestas (vertices).
- *Edição* – permite adição e remoção de arestas (vertices).

P. Burzyn, F. Bonomo, and G. Durán
NP-completeness results for edge modification problems.
Discrete Applied Mathematics., 2006.

Problemas de Modificação de Grafos

Table 1
Summary of complexity results for some edge modification problems

Graph Classes	Completion	Deletion	Editing
Perfect	NPC [26,6]	NPC [26,6]	NPC [26,6]
Chordal	NPC [35]	NPC [30]	NPC [30]
Interval	NPC [14,35]	NPC [16]	**NPC**
Unit Interval	NPC [35]	NPC [16]	**NPC**
Circular-Arc	NPC [30]	NPC [30]	**NPC**
Unit Circular-Arc	NPC [30]	NPC [30]	**NPC**
Proper Circular-Arc	NPC [30]	NPC [30]	**NPC**
Chain	NPC [35]	NPC [30]	?
Comparability	NPC [20]	NPC [36]	NPC [26]
Cograph	NPC [12]	NPC [12]	?
AT-Free	?	NPC [30]	?
Threshold	NPC [23]	NPC [23]	?
Bipartite	irrelevant	NPC [15]	NPC [15]
Split	NPC [26]	NPC [26]	P [21]
Cluster	P [30]	NPC [12]	NPC [30]
Trivially Perfect	NPC [35]	NPC [30]	?
Permutation	**NPC**	**NPC**	**NPC**
Circle	**NPC**	**NPC**	**NPC**
Weakly Chordal	**NPC**	**NPC**	?
Bridged	?	**NPC**	?
Clique-Helly Circular-Arc	**NPC**	**NPC**	**NPC**
Clique-Helly Chordal	**NPC**	**NPC**	**NPC**
Clique-Helly Perfect	**NPC**	**NPC**	**NPC**
Clique-Helly Comparability	**NPC**	**NPC**	**NPC**
Clique-Helly Permutation	**NPC**	**NPC**	**NPC**

Boldfaced results are obtained in this work, "NPC" indicates an NP-complete problem, "P" a polynomial problem, and "?" an open problem.

Problemas de Modificação de Grafos

Seja $G = (V, E)$ um grafo e Π uma propriedade sobre grafos, respectivamente. Problemas de Modificação de Grafos são aqueles feitos em $E(G)$ $(V(G))$ de modo a obter um novo grafo satisfazendo Π.

- *Adição* – permite apenas a adição de arestas (vertices).
- *Deleção* – permite apenas a remoção de arestas (vertices).
- *Edição* – permite adição e remoção de arestas (vertices).

Edge Decycling Set

Dado um grafo G e $M \subseteq E(G)$, se $G - M$ é acíclico, então M é um *conjunto Decycling* de G.

Problemas de Modificação de Grafos

Seja $G = (V, E)$ um grafo e Π uma propriedade sobre grafos, respectivamente. Problemas de Modificação de Grafos são aqueles feitos em $E(G)$ ($V(G)$) de modo a obter um novo grafo satisfazendo Π.

- *Adição* – permite apenas a adição de arestas (vertices).
- *Deleção* – permite apenas a remoção de arestas (vertices).
- *Edição* – permite adição e remoção de arestas (vertices).

Conjunto Decycling

Dado um grafo G e $M \subseteq E(G)$, se $G - M$ é acíclico, então M é um *conjunto Decycling* de G.

- Todo grafo admite um conjunto Decycling.

Problemas de Modificação de Grafos

Seja $G = (V, E)$ um grafo e Π uma propriedade sobre grafos, respectivamente. Problemas de Modificação de Grafos são aqueles feitos em $E(G)$ $(V(G))$ de modo a obter um novo grafo satisfazendo Π.

- *Adição* – permite apenas a adição de arestas (vertices).
- *Deleção* – permite apenas a remoção de arestas (vertices).
- *Edição* – permite adição e remoção de arestas (vertices).

Conjunto Decycling

Dado um grafo G e $M \subseteq E(G)$, se $G - M$ é acíclico, então M é um *conjunto Decycling* de G.

- Todo grafo admite um conjunto Decycling.
- O número mínimo de arestas é $m - (n - 1)$ para G conexo.

Problemas de Modificação de Grafos

Seja $G = (V, E)$ um grafo e Π uma propriedade sobre grafos, respectivamente. Problemas de Modificação de Grafos são aqueles feitos em $E(G)$ $(V(G))$ de modo a obter um novo grafo satisfazendo Π.

- *Adição* – permite apenas a adição de arestas (vertices).
- *Deleção* – permite apenas a remoção de arestas (vertices).
- *Edição* – permite adição e remoção de arestas (vertices).

Conjunto Decycling

Dado um grafo G e $M \subseteq E(G)$, se $G - M$ é acíclico, então M é um *conjunto Decycling* de G.

- Todo grafo admite um conjunto Decycling.
- O número mínimo de arestas é $m - (n - 1)$ para G conexo.
- **O que ocorre quando M é um emparelhamento?**

Emparelhamento

Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

Emparelhamento

Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

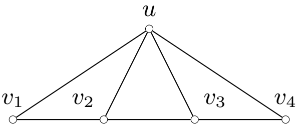
- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.

Emparelhamento

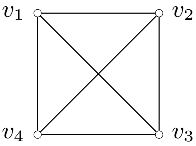
Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.
- Observe que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.



(a) Gem graph.



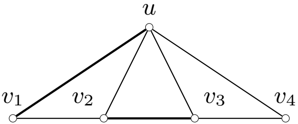
(b) K_4 graph.

Emparelhamento

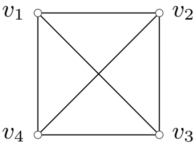
Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.
- Observe que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.



(a) Gem graph.



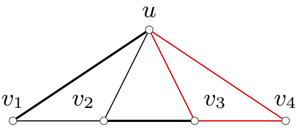
(b) K_4 graph.

Emparelhamento

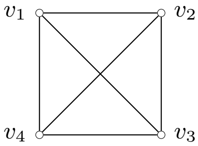
Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.
- Observe que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.



(a) Gem graph.



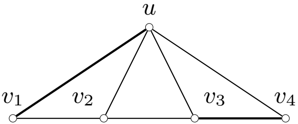
(b) K_4 graph.

Emparelhamento

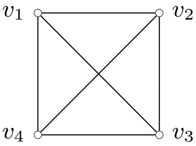
Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.
- Observe que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.



(a) Gem graph.

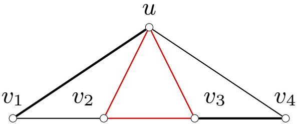


(b) K_4 graph.

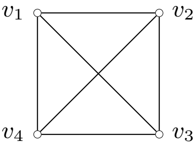
Emparelhamento

Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.
- Observe que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.



(a) Gem graph.



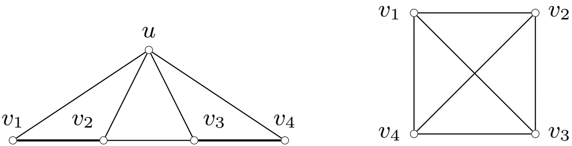
(b) K_4 graph.

Emparelhamento

Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.
- Observe que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.



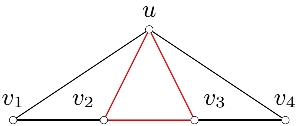
(a) Gem graph. (b) K_4 graph.

Emparelhamento

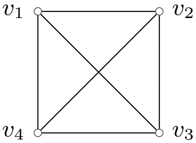
Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.
- Observe que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.



(a) Gem graph.



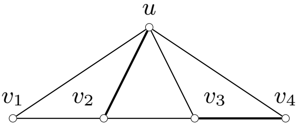
(b) K_4 graph.

Emparelhamento

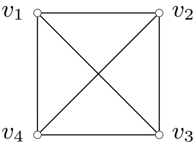
Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.
- Observe que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.



(a) Gem graph.



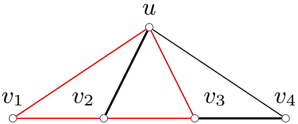
(b) K_4 graph.

Emparelhamento

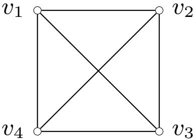
Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.
- Observe que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.



(a) Gem graph.



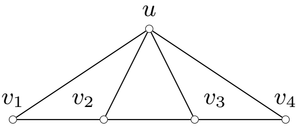
(b) K_4 graph.

Emparelhamento

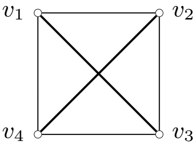
Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.
- Observe que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.



(a) Gem graph.



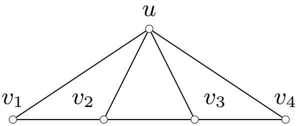
(b) K_4 graph.

Emparelhamento

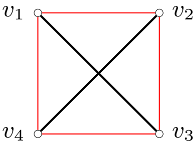
Dado um grafo finito, simples e não direcionado G, queremos

decidir se G admite um conjunto Decycling M que é um emparelhamento.

- Seja $\mathcal{FM}$ o conjunto de todos os grafos que possuem um *emparelhamento Decycling*.
- Observe que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.



(a) Gem graph.

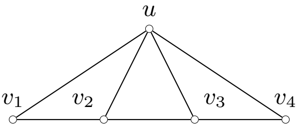


(b) K_4 graph.

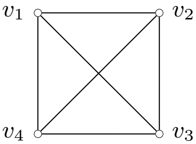
Emparelhamento

Lema 1:

Se $G \in \mathcal{FM}$, então $m(H) \leq \left\lfloor \frac{3n(H)}{2} \right\rfloor - 1$ para todo subgrafo H de G.



(a) Gem graph.



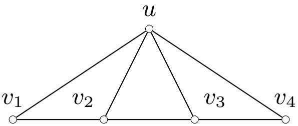
(b) K_4 graph.

Emparelhamento

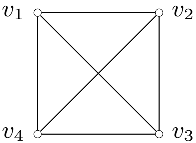
Lema 1:

Se $G \in \mathcal{FM}$, então $m(H) \leq \left\lfloor \frac{3n(H)}{2} \right\rfloor - 1$ para todo subgrafo H de G.

- Lembre que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.
- Para um emparelhamento Decycling M de G, segue que



(a) Gem graph.



(b) K_4 graph.

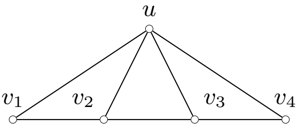
Emparelhamento

Lema 1:

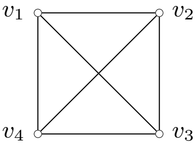
Se $G \in \mathcal{FM}$, então $m(H) \leq \left\lfloor \frac{3n(H)}{2} \right\rfloor - 1$ para todo subgrafo H de G.

- Lembre que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.
- Para um emparelhamento Decycling M de G, segue que

$$m(G) = m(G-M) + |M| \leq \underbrace{(n(G)-1)}_{G-M \text{ é uma árvore}} + \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{3n(G)}{2} \right\rfloor - 1.$$



(a) Gem graph.



(b) K_4 graph.

Emparelhamento

Lema 1:

Se $G \in \mathcal{FM}$, então $m(H) \leq \left\lfloor \frac{3n(H)}{2} \right\rfloor - 1$ para todo subgrafo H de G.

- Lembre que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.
- Para um emparelhamento Decycling M de G, segue que

$$m(G) = m(G-M) + |M| \leq \underbrace{(n(G)-1)}_{G-M \text{ é uma árvore}} + \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{3n(G)}{2} \right\rfloor - 1.$$

Lemma 2:

Se $G \in \mathcal{FM}$ é conexo, então G possui um emparelhamento M tal que $G - M$ é uma árvore.

Emparelhamento

Lema 1:

Se $G \in \mathcal{FM}$, então $m(H) \leq \left\lfloor \frac{3n(H)}{2} \right\rfloor - 1$ para todo subgrafo H de G.

- Lembre que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.
- Para um emparelhamento Decycling M de G, segue que

$$m(G) = m(G-M) + |M| \leq \underbrace{(n(G)-1)}_{G-M \text{ é uma árvore}} + \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{3n(G)}{2} \right\rfloor - 1.$$

Lemma 2:

Se $G \in \mathcal{FM}$ é conexo, então G possui um emparelhamento M tal que $G - M$ é uma árvore.

- Seja e uma ponte de M.

Emparelhamento

Lema 1:

Se $G \in \mathcal{FM}$, então $m(H) \leq \left\lfloor \frac{3n(H)}{2} \right\rfloor - 1$ para todo subgrafo H de G.

- Lembre que $\mathcal{FM}$ é fechado sobre subgrafos.
- Para um emparelhamento Decycling M de G, segue que

$$m(G) = m(G-M) + |M| \leq \underbrace{(n(G)-1)}_{G-M \text{ é uma árvore}} + \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{3n(G)}{2} \right\rfloor - 1.$$

Lemma 2:

Se $G \in \mathcal{FM}$ é conexo, então G possui um emparelhamento M tal que $G - M$ é uma árvore.

- Seja e uma ponte de M.
- $N = M - e$ é um emparelhamento Decycling de G.

Emparelhamento

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G tem uma árvore geradora T cujas folhas possuem grau no máximo 2 em G.

Lemma 2:

Se $G \in \mathcal{FM}$ é conexo, então G possui um emparelhamento M tal que $G - M$ é uma árvore.

- Seja e uma ponte de M.
- $N = M - e$ é um emparelhamento Decycling de G.

Emparelhamento

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G tem uma árvore geradora T cujas folhas possuem grau no máximo 2 em G.

- Se $G \in \mathcal{FM}$, então seja M um emparelhamento Decycling de G.

Lemma 2:

Se $G \in \mathcal{FM}$ é conexo, então G possui um emparelhamento M tal que $G - M$ é uma árvore.

- Seja e uma ponte de M.
- $N = M - e$ é um emparelhamento Decycling de G.

Emparelhamento

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G tem uma árvore geradora T cujas folhas possuem grau no máximo 2 em G.

- Se $G \in \mathcal{FM}$, então seja M um emparelhamento Decycling de G.
- Seja $T = G - M$ uma árvore geradora de G.

Lemma 2:

Se $G \in \mathcal{FM}$ é conexo, então G possui um emparelhamento M tal que $G - M$ é uma árvore.

- Seja e uma ponte de M.
- $N = M - e$ é um emparelhamento Decycling de G.

Emparelhamento

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G tem uma árvore geradora T cujas folhas possuem grau no máximo 2 em G.

- Se $G \in \mathcal{FM}$, então seja M um emparelhamento Decycling de G.
- Seja $T = G - M$ uma árvore geradora de G.
- Para uma folha u de T, $d_G(u) \leq d_T(u) + 1 = 2$.

Lemma 2:

Se $G \in \mathcal{FM}$ é conexo, então G possui um emparelhamento M tal que $G - M$ é uma árvore.

- Seja e uma ponte de M.
- $N = M - e$ é um emparelhamento Decycling de G.

Emparelhamento

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G tem uma árvore geradora T cujas folhas possuem grau no máximo 2 em G.

- Seja T uma árvore geradora de G cujas folhas possuem grau no máximo 2.

Lemma 2:

Se $G \in \mathcal{FM}$ é conexo, então G possui um emparelhamento M tal que $G - M$ é uma árvore.

- Seja e uma ponte de M.
- $N = M - e$ é um emparelhamento Decycling de G.

Emparelhamento

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G tem uma árvore geradora T cujas folhas possuem grau no máximo 2 em G.

- Seja T uma árvore geradora de G cujas folhas possuem grau no máximo 2.
- Seja M um conjunto Decycling de G.

Lemma 2:

Se $G \in \mathcal{FM}$ é conexo, então G possui um emparelhamento M tal que $G - M$ é uma árvore.

- Seja e uma ponte de M.
- $N = M - e$ é um emparelhamento Decycling de G.

Emparelhamento

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G tem uma árvore geradora T cujas folhas possuem grau no máximo 2 em G.

- Seja T uma árvore geradora de G cujas folhas possuem grau no máximo 2.
- Seja M um conjunto Decycling de G.
- Se u é incidente a duas arestas de M, então u é uma folha de T.

Lemma 2:

Se $G \in \mathcal{FM}$ é conexo, então G possui um emparelhamento M tal que $G - M$ é uma árvore.

- Seja e uma ponte de M.
- $N = M - e$ é um emparelhamento Decycling de G.

Emparelhamento

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G tem uma árvore geradora T cujas folhas possuem grau no máximo 2 em G.

- Seja T uma árvore geradora de G cujas folhas possuem grau no máximo 2.
- Seja M um conjunto Decycling de G.
- Se u é incidente a duas arestas de M, então u é uma folha de T.
- Uma contradição pela escolha de T.

Lemma 2:

Se $G \in \mathcal{FM}$ é conexo, então G possui um emparelhamento M tal que $G - M$ é uma árvore.

- Seja e uma ponte de M.
- $N = M - e$ é um emparelhamento Decycling de G.

NP-Completude

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G possui uma árvore geradora T cujas folhas são de grau no máximo 2 em G.

Theorem[Garey, Johson, and Tarjan, 1976]:

É NP-completo determinar se um grafo G possui um circuito Hamiltoniano mesmo se G é planar, cúbico, 3-conexo, e tem cintura pelo menos 5.

M.R. Garey, D.S. Johnson, and R.E. Tarjan
The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete.
SIAM Journal on Computing., 1976.

NP-Completude

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G possui uma árvore geradora T cujas folhas são de grau no máximo 2 em G.

Theorem[Garey, Johson, and Tarjan, 1976]:

É NP-completo determinar se um grafo G possui um circuito Hamiltoniano mesmo se G é planar, cúbico, 3-conexo, e tem cintura pelo menos 5.

- Remova uma aresta (u, v) pertencente a todo ciclo Hamiltoniano de G.

NP-Completude

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G possui uma árvore geradora T cujas folhas são de grau no máximo 2 em G.

Theorem 1:

Seja G um grafo com exatamente dois vértices de grau 2, u e v. É NP-completo determinar se G possui um caminho Hamiltoniano entre u e v, mesmo se G é 2-conexo, planar, sub-cúbico e tem cintura pelo menos 5.

NP-Completude

Lemma 3:

Se G é sub-cúbico e conexo, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G possui uma árvore geradora T cujas folhas são de grau no máximo 2 em G.

Theorem 1:

Seja G um grafo com exatamente dois vértices de grau 2, u e v. É NP-completo determinar se G possui um caminho Hamiltoniano entre u e v, mesmo se G é 2-conexo, planar, sub-cúbico e tem cintura pelo menos 5.

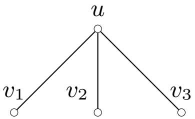
Theorem 2:

Para um grafo 2-conexo, planar, sub-cúbico G de cintura pelo menos 5 e com exatamente dois vértices de grau 2, é NP-completo determinar se $G \in \mathcal{FM}$.

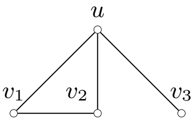
Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:

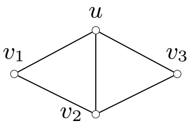
Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.



(a) Grafo garra.



(b) Grafo pata.



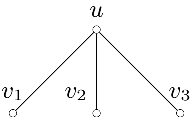
(c) Grafo diamante.

Grafos Livres de Garra e Pata

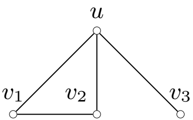
Theorem 3:

Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

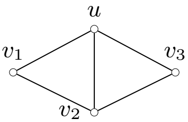
- Se G é um caminho, um diamante ou um ciclo, então $G \in \mathcal{FM}$.



(a) Grafo garra.



(b) Grafo pata.



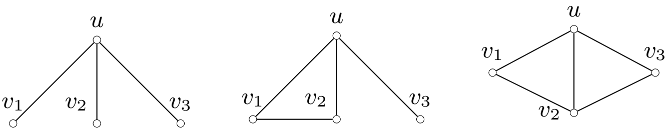
(c) Grafo diamante.

Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:

Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

- Suponha que $G \in \mathcal{FM}$.



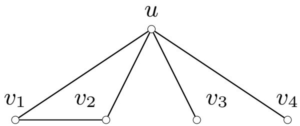
(a) Grafo garra. (b) Grafo pata. (c) Grafo diamante.

Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:

Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

- Suponha que $G \in \mathcal{FM}$.
- Afirmamos que G não possui vértice u de grau 4.

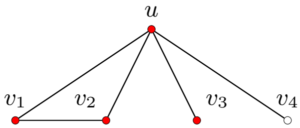


Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:

Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

- Suponha que $G \in \mathcal{FM}$.
- Afirmamos que G não possui vértice u de grau 4.

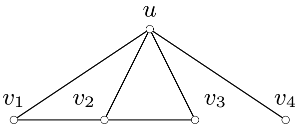


Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:

Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

- Suponha que $G \in \mathcal{FM}$.
- Afirmamos que G não possui vértice u de grau 4.

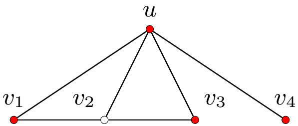


Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:

Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

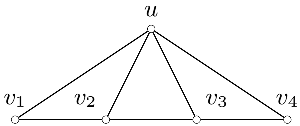
- Suponha que $G \in \mathcal{FM}$.
- Afirmamos que G não possui vértice u de grau 4.



Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:
Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

- Suponha que $G \in \mathcal{FM}$.
- Afirmamos que G não possui vértice u de grau 4.

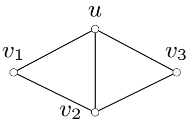


Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:

Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

- Se G possui um vértice u de grau 3, então G é um diamante.

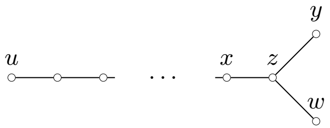


Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:

Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

- Se G possui um vértice u de grau 1, então G é um caminho.

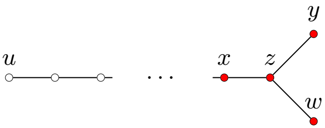


Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:

Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

- Se G possui um vértice u de grau 1, então G é um caminho.



Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:

Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

- Se G possui um vértice u de grau 1, então G é um caminho.

Problema de decisão mais geral (PG).

Instância:	Um grafo G e um conjunto $F \subseteq E(G)$.
Tarefa:	Decidir se G possui um emparelhamento Decycling M que não intersecta F, e determiná-lo se ele existe.

Grafos Livres de Garra e Pata

Theorem 3:

Se G é um grafo conexo e livre de *garra* e *pata*, então $G \in \mathcal{FM}$ sse G é um caminho, um diamante ou um ciclo.

- Se G possui um vértice u de grau 1, então G é um caminho.

Problema de decisão mais geral (PG).

Instância: Um grafo G e um conjunto $F \subseteq E(G)$.
Tarefa: Decidir se G possui um emparelhamento Decycling M que não intersecta F, e determiná-lo se ele existe.

- M é dito ser um *emparelhamento de* (G, F).

Grafos Cordais

Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

Grafos Cordais

Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

- Se G contém um ciclo C de tamanho $\ell \geq 5$, então

$$m(G[V(C)]) \geq 2\ell - 3 > \frac{3\ell}{2} - 1,$$

contradizendo o Lema 1.

Grafos Cordais

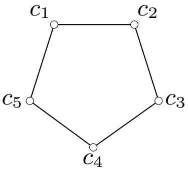
Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

- Se G contém um ciclo C de tamanho $\ell \geq 5$, então

$$m(G[V(C)]) \geq 2\ell - 3 > \frac{3\ell}{2} - 1,$$

contradizendo o Lema 1.



Grafos Cordais

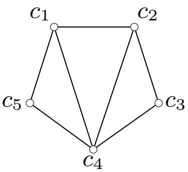
Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

- Se G contém um ciclo C de tamanho $\ell \geq 5$, então

$$m(G[V(C)]) \geq 2\ell - 3 > \frac{3\ell}{2} - 1,$$

contradizendo o Lema 1.



Grafos Cordais

Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

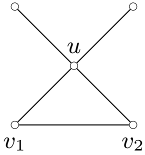
- Podemos provar que todos os blocos de G são ou um triângulo ou um diamante.

Grafos Cordais

Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

- Podemos provar que todos os blocos de G são ou um triângulo ou um diamante.
- Seja B um bloco folha de G e u uma articulação de B.

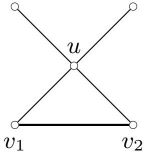


Grafos Cordais

Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

- Podemos provar que todos os blocos de G são ou um triângulo ou um diamante.
- Seja B um bloco folha de G e u uma articulação de B.
- Se $v_1v_2 \notin F$ então M é um emparelhamento de (G, F) sse $M - v_1v_2$ é um emparelhamento de $(G - \{v_1, v_2\}, F \setminus \{uv_1, uv_2\})$.

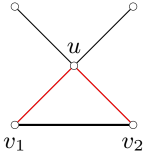


Grafos Cordais

Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

- Podemos provar que todos os blocos de G são ou um triângulo ou um diamante.
- Seja B um bloco folha de G e u uma articulação de B.
- Se $v_1v_2 \notin F$ então M é um emparelhamento de (G, F) sse $M - v_1v_2$ é um emparelhamento de $(G - \{v_1, v_2\}, F \setminus \{uv_1, uv_2\})$.

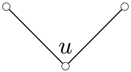


Grafos Cordais

Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

- Podemos provar que todos os blocos de G são ou um triângulo ou um diamante.
- Seja B um bloco folha de G e u uma articulação de B.
- Se $v_1 v_2 \notin F$ então M é um emparelhamento de (G, F) sse $M - v_1 v_2$ é um emparelhamento de $(G - \{v_1, v_2\}, F \setminus \{uv_1, uv_2\})$.

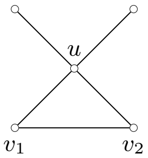


Grafos Cordais

Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

- Podemos provar que todos os blocos de G são ou um triângulo ou um diamante.
- Seja B um bloco folha de G e u uma articulação de B.
- Se $v_1v_2 \in F$ mas $uv_1 \notin F$ ou $uv_2 \notin F$, então M é um emparelhamento de (G, F) sse $M - uv_1$ é um emparelhamento de $(G - \{v_1, v_2\}, (F \setminus \{uv_2, v_1v_2\}) \cup \{ux : x \in N_G(u) \setminus \{v_1, v_2\}\})$.

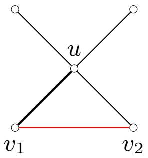


Grafos Cordais

Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

- Podemos provar que todos os blocos de G são ou um triângulo ou um diamante.
- Seja B um bloco folha de G e u uma articulação de B.
- Se $v_1v_2 \in F$ mas $uv_1 \notin F$ ou $uv_2 \notin F$, então M é um emparelhamento de (G, F) sse $M - uv_1$ é um emparelhamento de $(G - \{v_1, v_2\}, (F \setminus \{uv_2, v_1v_2\}) \cup \{ux : x \in N_G(u) \setminus \{v_1, v_2\}\})$.

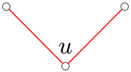


Grafos Cordais

Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

- Podemos provar que todos os blocos de G são ou um triângulo ou um diamante.
- Seja B um bloco folha de G e u uma articulação de B.
- Se $v_1v_2 \in F$ mas $uv_1 \notin F$ ou $uv_2 \notin F$, então M é um emparelhamento de (G, F) sse $M - uv_1$ é um emparelhamento de $(G - \{v_1, v_2\}, (F \setminus \{uv_2, v_1v_2\}) \cup \{ux : x \in N_G(u) \setminus \{v_1, v_2\}\})$.



Grafos Cordais

Theorem 4:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos cordais.

- Podemos provar que todos os blocos de G são ou um triângulo ou um diamante.
- Seja B um bloco folha de G e u uma articulação de B.
- Podemos iterativamente aplicar estas transformações.

Grafos Livres de P_5

Theorem 5:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos livres de P_5.

Grafos Livres de P_5

Theorem 5:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos livres de P_5.

Teorema[Liu e Zhou, 1994]:

Todo grafo livre de P_5 possui um C_5 dominante ou uma clique dominante.

J. Liu, H. Zhou
Dominating subgraphs in graphs with some forbidden structures.
Discrete Mathematics., 1994.

Grafos Livres de P_5

Theorem 5:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos livres de P_5.

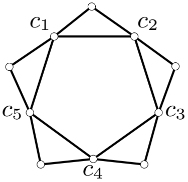
- Suponha que G possui um C_5 dominante C.

Grafos Livres de P_5

Theorem 5:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos livres de P_5.

- Suponha que G possui um C_5 dominante C.
- Todo vértice $v \in V(G) \setminus V(C)$ possui ao menos dois vizinhos em $V(C)$.



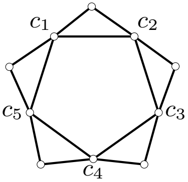
Grafos Livres de P_5

Theorem 5:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos livres de P_5.

- Suponha que G possui um C_5 dominante C.
- Todo vértice $v \in V(G) \setminus V(C)$ possui ao menos dois vizinhos em $V(C)$.
- Logo

$$m(G) \;\geq\; 5 + 2(n(G) - 5) \;=\; 2n(G) - 5.$$

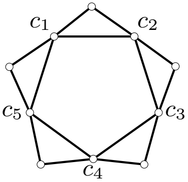


Grafos Livres de P_5

Theorem 5:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos livres de P_5.

- Suponha que G possui um C_5 dominante C.
- Todo vértice $v \in V(G) \setminus V(C)$ possui ao menos dois vizinhos em $V(C)$.
- Logo
$$m(G) \;\geq\; 5 + 2(n(G) - 5) \;=\; 2n(G) - 5.$$
- Se $n(G) \geq 9$, então $m(G) > \frac{3n(G)}{2} - 1$, contradizendo o Lema 1.

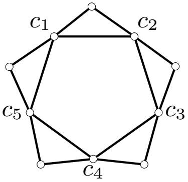


Grafos Livres de P_5

Theorem 5:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos livres de P_5.

- Suponha que G possui um C_5 dominante C.
- Todo vértice $v \in V(G) \setminus V(C)$ possui ao menos dois vizinhos em $V(C)$.
- Logo
$$m(G) \;\geq\; 5 + 2(n(G) - 5) \;=\; 2n(G) - 5.$$
- Se $n(G) \geq 9$, então $m(G) > \frac{3n(G)}{2} - 1$, contradizendo o Lema 1.
- Portanto $n(G) \leq 8$ e PG pode ser resolvido em tempo constante.



Grafos Distância Hereditária Livres de C_4

Theorem 6:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos grafos distância hereditária livres de C_4.

Grafos Distância Hereditária Livres de C_4

Theorem 6:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos grafos distância hereditária livres de C_4.

- Um grafo G é distância hereditária se ele é conexo e as distâncias em qualquer subgrafo induzido permanecem as mesmas em relação a G.

Grafos Distância Hereditária Livres de C_4

Theorem 6:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos grafos distância hereditária livres de C_4.

Teorema[Bandelt e Mulder, 1986]:

Um grafo é distância hereditária se ele pode ser construído a partir de um único vértice pelas seguintes operações:

- Adição de um vértice pendente;
- Criação de dois gêmeos verdadeiros;
- Criação de dois gêmeos falsos.

H.-J. Bandelt, H.M. Mulder
Distance-hereditary graphs.
Journal of Combinatorial Theory., 1986.

Grafos Distância Hereditária Livres de C_4

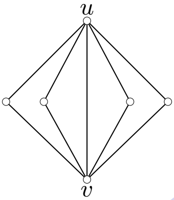
Theorem 6:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos grafos distância hereditária livres de C_4.

Teorema[Bandelt e Mulder, 1986]:

Um grafo é distância hereditária se ele pode ser construído a partir de um único vértice pelas seguintes operações:

- Adição de um vértice pendente;
- Criação de dois gêmeos verdadeiros;
- Criação de dois gêmeos falsos.



Grafos Distância Hereditária Livres de C_4

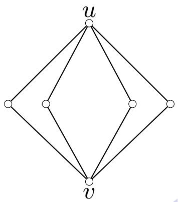
Theorem 6:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos grafos distância hereditária livres de C_4.

Teorema[Bandelt e Mulder, 1986]:

Um grafo é distância hereditária se ele pode ser construído a partir de um único vértice pelas seguintes operações:

- Adição de um vértice pendente;
- Criação de dois gêmeos verdadeiros;
- Criação de dois gêmeos falsos.

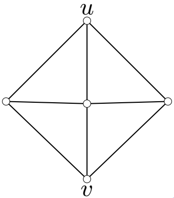


Grafos Distância Hereditária Livres de C_4

Theorem 6:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos grafos distância hereditária livres de C_4.

- Se $|N_G(u) \setminus \{v\}| \geq 3$, então G possui um grafo gema.

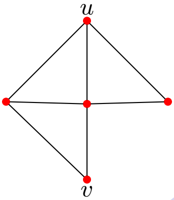


Grafos Distância Hereditária Livres de C_4

Theorem 6:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos grafos distância hereditária livres de C_4.

- Se $|N_G(u) \setminus \{v\}| \geq 3$, então G possui um grafo gema.

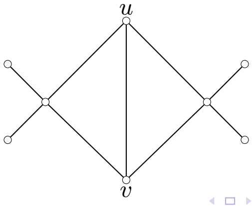


Grafos Distância Hereditária Livres de C_4

Theorem 6:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos grafos distância hereditária livres de C_4.

- Se $|N_G(u) \setminus \{v\}| = 2$, então $G[N_G[u]]$ é um diamante.

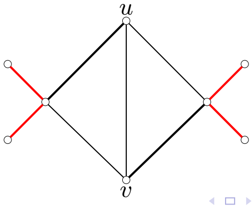


Grafos Distância Hereditária Livres de C_4

Theorem 6:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos grafos distância hereditária livres de C_4.

- Se $|N_G(u) \setminus \{v\}| = 2$, então $G[N_G[u]]$ é um diamante.

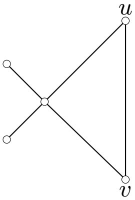


Grafos Distância Hereditária Livres de C_4

Theorem 6:

PG pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos grafos distância hereditária livres de C_4.

- Se $|N_G(u) \setminus \{v\}| = 1$, então $G[N_G[u]]$ é um triângulo.



Odd Decycling Matchings

Obrigado!