# Subgrafos multipartidos grandes em grafos H-livre

Taísa Martins (UFF)

com Ping Hu, Bernard Lidický, Sergey Norin e Jan Volec

Seminário de Combinatória IME - UFF

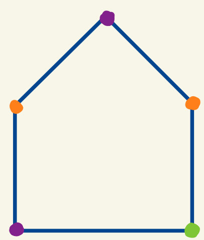
# Grafos multipartidos

Um grafo $G = (V, E)$ é **r-partido** se $\exists\ V = (V_1, V_2, \dots, V_r)$ tal que

$$(V_i \times V_i) \cap E = \emptyset$$

para $1 \leq i \leq r$.

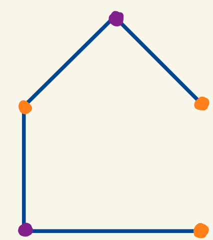
## Exemplo



grafo 3-partido

removendo uma aresta

→



subgrafo 2-partido

# Subgrafos multipartidos grandes

$G$ um grafo, $r \geqslant 2$.

$$d_r(G) = \min\{|X| : X \subset E(G) \text{ e } G - X \text{ é } r\text{-partido}\}$$

Logo,

$d_1(G) =$ e $d_2(G) =$

# Subgrafos multipartidos grandes

$G$ um grafo, $r \geq 2$.

$$d_r(G) = \min\{|X| : X \subset E(G) \text{ e } G - X \text{ é } r\text{-partido}\}$$

Logo,

$$d_1(G) = e(G) \quad \text{e} \quad d_2(G) = e(G) - \text{maxcut}(G).$$

# Subgrafos multipartidos grandes

$G$ um grafo, $r \geqslant 2$.

$$d_r(G) = \min \{ |X| : X \subset E(G) \text{ e } G - X \text{ é } r\text{-partido} \}$$

Logo,

$$d_1(G) = e(G) \quad \text{e} \quad d_2(G) = e(G) - \text{maxcut}(G).$$

<u>Limitante</u>

$$d_r(G) \leq$$

# Subgrafos multipartidos grandes

$G$ um grafo, $r \geq 2$.

$$d_r(G) = \min\{|X| : X \subset E(G) \text{ e } G - X \text{ é } r\text{-partido}\}$$

Logo,

$$d_1(G) = e(G) \quad \text{e} \quad d_2(G) = e(G) - \text{maxcut}(G).$$

<u>Limitante</u>

$$d_r(G) \leq \frac{e(G)}{r} \leq \frac{1}{r}\binom{v(G)}{2}$$

↳ justo p/ o grafo completo

# Subgrafos multipartidos grandes

$G$ um grafo, $r \geq 2$.

$$d_r(G) = \min \{ |X| : X \subset E(G) \text{ e } G - X \text{ é } r\text{-partido} \}$$

Logo,

$$d_1(G) = e(G) \quad \text{e} \quad d_2(G) = e(G) - \text{maxcut}(G).$$

Limitante

$$d_r(G) \leq \frac{e(G)}{r} \leq \frac{1}{r} \binom{v(G)}{2}$$

↳ justo p/ o grafo completo

e se $G$ for localmente esparso?

# Subgrafos multipartidos grandes

Füredi ('15) Seja $r \geqslant 2$. Se $G$ é um grafo de $n$ vts $K_{r+1}$-livre, então

$$d_r(G) \leq \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2} - e(G)$$

# Subgrafos multipartidos grandes

Füredi ('15) Seja $r \geq 2$. Se $G$ é um grafo de $n$ vts $K_{r+1}$-livre, então

$$d_r(G) \leq \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} - e(G)$$

Conjectura 1 (HLMNV) seja $r \geq 2$. $G$ é um grafo de $n$ vts $K_{r+1}$-livre, então

$$d_r(G) \leq 0.8\left(\frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} - e(G)\right)$$

HLMNV (22+) Conjectura 1 vale p/ $r \in \{2,3,4\}$.

# Subgrafos multipartidos grandes

Füredi ('15) Seja $r \geq 2$. Se $G$ é um grafo de $n$ vts $K_{r+1}$-livre, então

$$d_r(G) \leq \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} - e(G)$$

Conjectura 1 (HLMNV) Seja $r \geq 2$. $G$ é um grafo de $n$ vts $K_{r+1}$-livre, então

$$d_r(G) \leq 0.8\left(\frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} - e(G)\right)$$

se verdadeira, a desigualdade é justa!

HLMNV (22+) Conjectura 1 vale p/ $r \in \{2,3,4\}$.

# Subgrafos multipartidos grandes

Füredi ('15') Seja $r \geq 2$. Se $G$ é um grafo de $n$ vts $K_{r+1}$-livre, então

$$d_r(G) \leq \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2} - e(G)$$

Conjectura 1 (HLMNV) seja $r \geq 2$. $G$ é um grafo de $n$ vts $K_{r+1}$-livre, então

$$d_r(G) \leq 0.8 \left( \frac{r-1}{r} \frac{n^2}{2} - e(G) \right)$$

se verdadeira, a desigualdade é justa!

HLMNV (22+) Conjectura 1 vale p/ $r \in \{2, 3, 4\}$.

HLMNV (22+) Para $r \geq 5$, $\exists\ \varepsilon := \varepsilon(r) > 0$ t.q.

$$\frac{1}{10^7 r^{12}}$$

$$G \text{ é } K_{r+1}\text{-livre} \Rightarrow d_r(G) \leq (1-\varepsilon)\left( \frac{r-1}{2r} \cdot n^2 - e(G) \right)$$

# Subgrafos bipartidos grandes

Conjectura 2 (Erdős) $G$ é $K_3$-livre $\Rightarrow$ $d_2(G) \leq \dfrac{v(G)^2}{25}$.

# Subgrafos bipartidos grandes

blow up do $C_5$

Conjectura 2 (Erdős) $G$ é $K_3$-livre $\Rightarrow d_2(G) \leq \frac{v(G)^2}{25}$.

Erdős, Faudree, Pach, Spencer (88') $d_2(G) \leq \frac{v(G)^2}{18}$

Balogh, Clemen, Lidický (21+) $d_2(G) \leq \frac{v(G)^2}{23.5}$

# Subgrafos bipartidos grandes

blow up do $C_5$

**Conjectura 2 (Erdős)** $G$ é $K_3$-livre $\Rightarrow$ $d_2(G) \leq \frac{v(G)^2}{25}$.

Erdős, Faudree, Pach, Spencer (88') $d_2(G) \leq \frac{v(G)^2}{18}$

Balogh, Clemen, Lidický (21+) $d_2(G) \leq \frac{v(G)^2}{23.5}$

**Conjectura 3 (Sudakov)** Seja $r \geqslant 3$. Se $G$ é $K_{r+1}$-livre e $v(G) = n$, então

$$d_2(G) \leq \begin{cases} \frac{(r-1)^2}{4r^2} n^2 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \frac{r-2}{4r} n^2 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Além disso, a igualdade vale sse $G = T(n,r)$ e $r \mid n$.

# Subgrafos bipartidos grandes

blow up do $C_5$

**Conjectura 2 (Erdős)** $G$ é $K_3$-livre $\Rightarrow$ $d_2(G) \leq \dfrac{v(G)^2}{25}$.

Erdős, Faudree, Pach, Spencer (88') $d_2(G) \leq \dfrac{v(G)^2}{18}$

Balogh, Clemen, Lidický (21+) $d_2(G) \leq \dfrac{v(G)^2}{23.5}$

**Conjectura 3 (Sudakov)** Seja $r \geq 3$. Se $G$ é $K_{r+1}$-livre e $v(G) = n$, então

$$d_2(G) \leq \begin{cases} \dfrac{(r-1)^2}{4r^2}\, n^2 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\[2ex] \dfrac{r-2}{4r}\, n^2 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Além disso, a igualdade vale sse $G = T(n,r)$ e $r \mid n$.

Sudakov (07') Conj. 3 vale p/ $r = 3$ HLMNV (22+) Conj. 3 vale p/ $r = 5$

# Próximos passos

- Füredi c/ flag algebras

- Conjectura 1 p/ $r = 2$

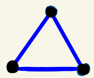
  $G$ é um grafo de $n$ vts $K_3$-livre, então

  $$d_2(G) \leq 0.8 \left( \frac{n^2}{4} - e(G) \right)$$

- Construções justas p/ a conjectura 1

# "Flag Algebra"

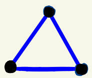
Seja $G$ um grafo em $n$ vértices.

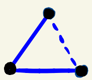
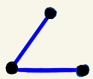
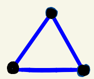


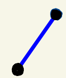
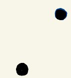
probabilidade que 3 vértices em $G$ formam um $K_3$

# "Flag Algebra"

Seja $G$ um grafo em $n$ vértices.

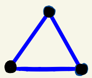
 probabilidade que 3 vértices em $G$ formam um $K_3$

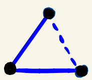
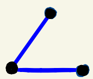
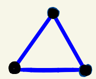
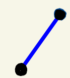
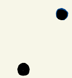
 =  + 

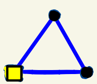
 +  = 1

# "Flag Algebra"

Seja $G$ um grafo em $n$ vértices.

 probabilidade que 3 vértices em $G$ formam um $K_3$

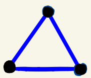
 =  +       +  = 1

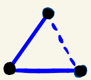
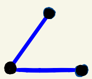
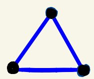

$v$

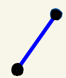
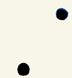
probabilidade que 2 vértices diferentes de $v$ em $G$ estão conectados entre si e são vizinhos de $v$

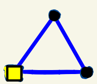
# "Flag Algebra"

Seja G um grafo em n vértices.

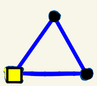
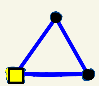
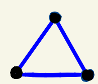
 probabilidade que 3 vértices em G formam um $K_3$

 =  + 

 +  = 1

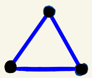

v

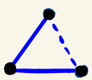
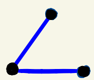
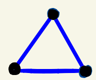
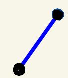
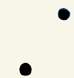
probabilidade que 2 vértices diferentes de v em G estão conectados entre si e são vizinhos de v

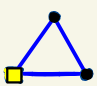
[  ]$_v$ = $\mathbb{E}$ [  v ] = 

# "Flag Algebra"

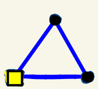
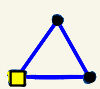
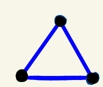
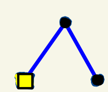
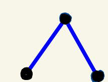
Seja $G$ um grafo em $n$ vértices.

 probabilidade que 3 vértices em $G$ formam um $K_3$

 $=$  $+$       $+$  $= 1$

 probabilidade que 2 vértices diferentes de $v$ em $G$ estão conectados entre si e são vizinhos de $v$

$v$

$\Big[$  $\Big]_v = \mathbb{E}\Big[$  $\Big]$ $=$      $\Big[$  $\Big] = \frac{2}{3}$ 

$v$ $v$

# Füredi com flag algebras

Füredi (2015) Seja $r \geq 2$. Se $G$ é um grafo de $n$ vts $K_{r+1}$-livre, então

$$d_r(G) \leq \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} - e(G)$$

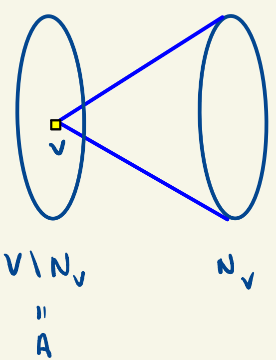
# Füredi com flag algebras

Füredi (2015) Seja $r \geq 2$. Se $G$ é um grafo de $n$ vts $K_{r+1}$-livre, então

$$d_r(G) \leq \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} - e(G)$$

prova:

Dado um vértice $v$, considere a seguinte partição:




$X_v$ = número de arestas dentro da partição dada por $v$.

$$d_r(G) \leq X_v$$

$$\leq e(G[A]) + \frac{r-2}{r-1}\frac{|N(v)|^2}{2} - e(G[N_v])$$

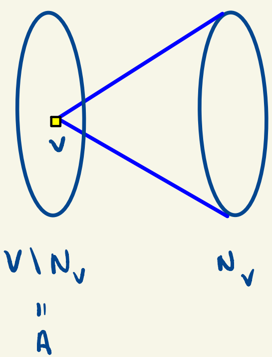
# Füredi com flag algebras

Füredi (2015) Seja $r \geq 2$. Se $G$ é um grafo de $n$ vts $K_{r+1}$-livre, então

$$d_r(G) \leq \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} - e(G)$$

prova:

Dado um vértice $v$, considere a seguinte partição:




$X_v$ = número de arestas dentro da partição dada por $v$.

$$d_r(G) \leq X_v$$

$$\leq e(G[A]) + \frac{r-2}{r-1}\frac{|N(v)|^2}{2} - e(G[N_v])$$

suficiente: $v$ uniforme $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X_v] \leq \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} - e(G)$

# Füredi com flag algebras

Queremos mostrar que

$$\mathbb{E}\left[ X_v - \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} + e(G) \right] \leq 0 \qquad X_v \leq e(G[A]) + \frac{r-2}{r-1}\frac{|N(v)|^2}{2} - e(G[N_v])$$

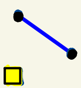
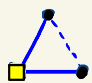
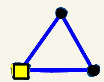
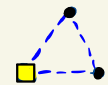
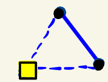
---

# Füredi com flag algebras

Queremos mostrar que

$$\mathbb{E}\left[ X_v - \frac{r-1}{r}\,\frac{n^2}{2} + e(G) \right] \le 0 \qquad\qquad X_v \le e(G[A]) + \frac{r-2}{r-1}\,\frac{|N(v)|^2}{2} - e(G[N_v])$$

---

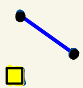
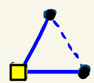
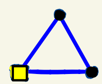
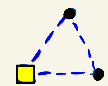
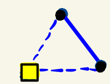
$[\![$  $+ \dfrac{r-2}{r-1}$  $-$  $- \dfrac{(r-1)}{r}$  $+$  $]\!] \le 0$

# Füredi com flag algebras

Queremos mostrar que

$$\mathbb{E}\left[X_v - \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} + e(G)\right] \leq 0 \qquad X_v \leq e(G[A]) + \frac{r-2}{r-1}\frac{|N(v)|^2}{2} - e(G[N_v])$$

---

[  $+ \dfrac{r-2}{r-1}$  $-$  $- \dfrac{(r-1)}{r}$  $+$  ] $\leq 0$

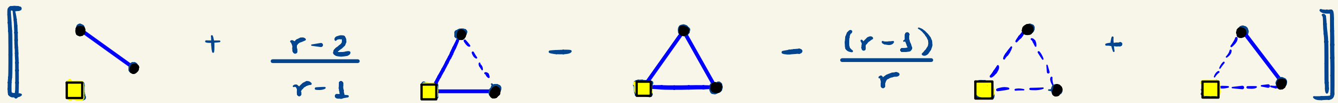
↳ queremos minimizar essa expressão

# Füredi com flag algebras

Queremos mostrar que

$$\mathbb{E}\left[ X_v - \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} + e(G) \right] \leq 0 \qquad X_v \leq e(G[A]) + \frac{r-2}{r-1}\frac{|N(v)|^2}{2} - e(G[N_v])$$

---

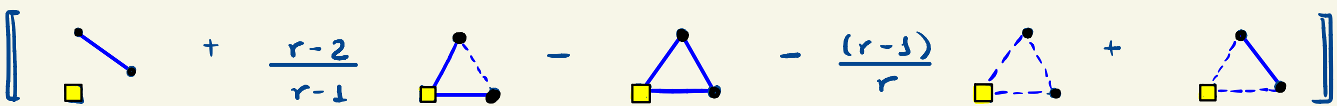


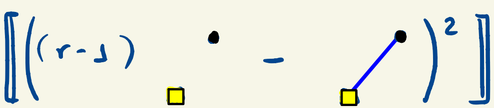
$\leq 0$

↳ queremos minimizar essa expressão

Observe que a seguinte igualdade vale para $r \geq 2$

$< 0$

$(r-r^2)$ 

$=$ 

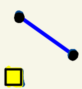
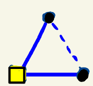
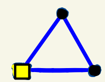
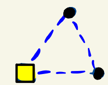
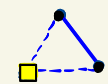
$\geq 0$

# Füredi com flag algebras

Queremos mostrar que

$$\mathbb{E}\left[ X_v - \frac{r-1}{r}\,\frac{n^2}{2} + e(G) \right] \le 0 \qquad X_v \le e(G[A]) + \frac{r-2}{r-1}\,\frac{|N(v)|^2}{2} - e(G[N_v])$$

Mostramos que

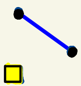
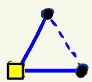
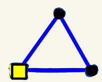
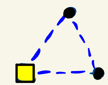
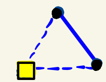
$\Big[$  $+\ \frac{r-2}{r-1}$  $-$  $-\ \frac{(r-1)}{r}$  $+$  $\Big] \le 0$

# Füredi com flag algebras

Queremos mostrar que

$$\mathbb{E}\left[X_v - \frac{r-1}{r}\frac{n^2}{2} + e(G)\right] \leq 0 \qquad X_v \leq e(G[A]) + \frac{r-2}{r-1}\frac{|N(v)|^2}{2} - e(G[N_v])$$

Mostramos que

$\Big[\!\Big[$  $+ \dfrac{r-2}{r-1}$  $-$  $- \dfrac{(r-1)}{r}$  $+$  $\Big]\!\Big] \leq 0$

<u>Lema</u> Fixe inteiros $r, b$ e $\ell$. Se $G$ é $K_{r+1}$-livre então o blow-up $G[b]$ é $K_{r+1}$-livre e

$$d_\ell(G[b]) = b^2 d_\ell(G).$$

□

# Conjectura 1 p/ $r = 2$

HLMNV (22+) $G$ é um grafo de $n$ vts $K_3$-livre, então

$$d_2(G) \leq 0.8 \left( \frac{n^2}{4} - e(G) \right)$$

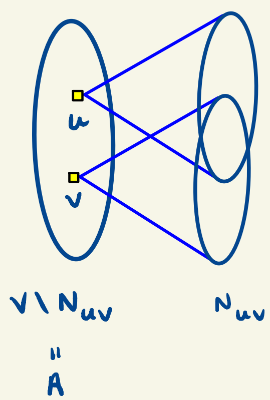
# Conjectura 1 p/ $r=2$

HLMNV (22+) $G$ é um grafo de $n$ vts $K_3$-livre, então

$$d_2(G) \leq 0.8\left(\frac{n^2}{4} - e(G)\right)$$

prova:

Dados vértices não-adjacentes $u$ e $v$, considere a seguinte partição




$X_{uv}$ = número de arestas dentro da partição dada por $\{u,v\}$.

$$d_r(G) \leq X_{uv} = e(G[N_{uv}]) + e(G[A])$$

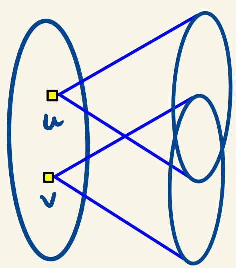
## Conjectura 1 p/ $r=2$

HLMNV (22+) $G$ é um grafo de $n$ vts $K_3$-livre, então

$$d_2(G) \leq 0.8 \left( \frac{n^2}{4} - e(G) \right)$$

prova:

Dados vértices não-adjacentes $u$ e $v$, considere a seguinte partição




$V \setminus N_{uv}$ $\quad$ $N_{uv}$

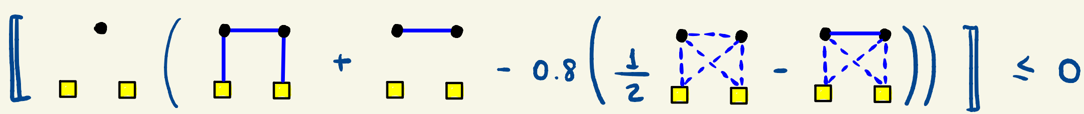
$\shortparallel$

$A$

$X_{uv}$ = número de arestas dentro da partição dada por $\{u,v\}$.

$$d_r(G) \leq X_{uv} = e(G[N_{uv}]) + e(G[A])$$

Mostramos que



# Conjectura 1 p/ $r=2$

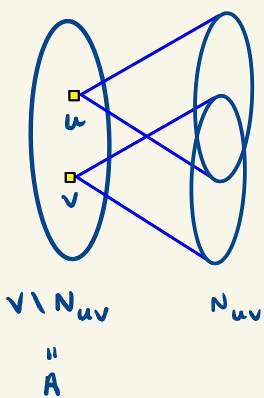
HLMNV (22+) $G$ é um grafo de $n$ vts $K_3$-livre, então

$$d_2(G) \leq 0.8\left(\frac{n^2}{4} - e(G)\right)$$

Além disso, se $0 < d_2(G) = 0.8\left(\frac{n^2}{4} - e(G)\right)$ então $G$ é um blow up balanceado do $C_5$.

prova:

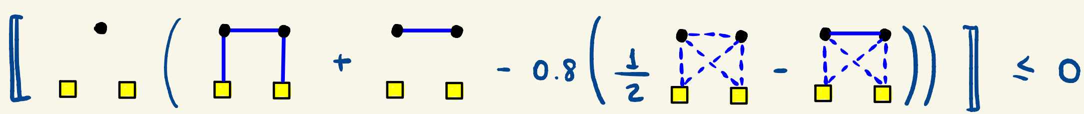
Dados vértices não-adjacentes $u$ e $v$, considere a seguinte partição




$X_{uv}$ = número de arestas dentro da partição dada por $\{u,v\}$.

$$d_r(G) \leq X_{uv} = e(G[N_{uv}]) + e(G[A])$$

Mostramos que



# Construções justas p/ a conjectura 1

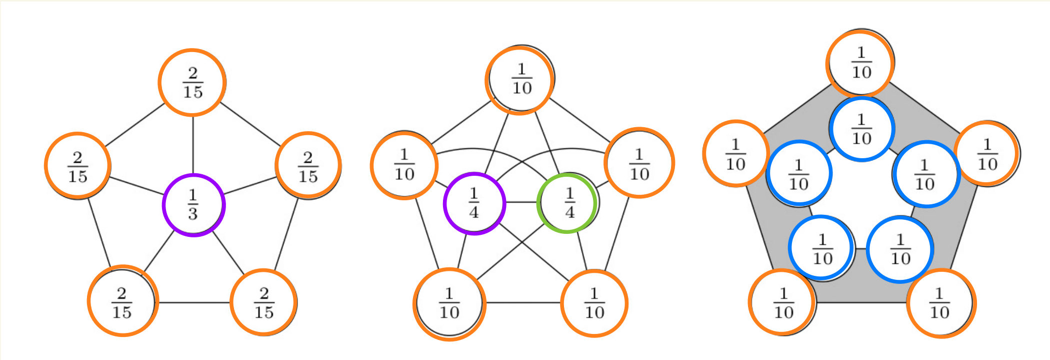
seja $r = a + 2b \geq 2$.

$H(a,b)$ : join de $a$ cópias do $K_1$ e $b$ cópias do $C_5$

$G(a,b)$ : blowup de $H$ onde

vértices do $K_1$ tem peso $1/r$

vértices do $C_5$ tem peso $2/(5r)$




$G(1,1)$ $\quad$ $G(2,1)$ $\quad$ $G(0,2)$

$r = 3$ $\quad$ $r = 4$

# Construções justas p/ a conjectura 1

$H(a,b)$ : join de $a$ cópias do $K_1$ e $b$ cópias do $C_5$

$G(a,b)$ : blowup de $H$ onde

vértices do $K_1$ tem peso $1/r$

vértices do $C_5$ tem peso $2/(5r)$

HLMNV (22+) Sejam $a, b \geqslant 0$ inteiros, $G = G(a,b)$ onde $r = a + 2b$.

$$d_r(G) = 0.8 \left( \frac{r-1}{r} \frac{v^2(G)}{2} - e(G) \right) = 4b$$

Obrigada!