Introdução ao Método Probabilístico: Primeiro e Segundo Momento

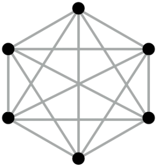
Alicia Maria do Nascimento Amorim

Universidade Federal Fluminense -UFF
Pós Graduação em Matemática

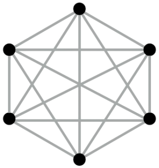
Orientadora: Taísa Lopes Martins

30 de Novembro de 2022

Jogo do Hexágono

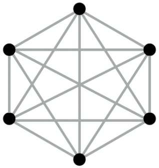


Jogo do Hexágono

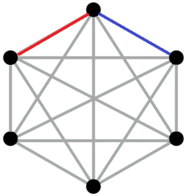


- Dois jogadores (Alice e Bob);
- Os jogadores jogam alternadamente;

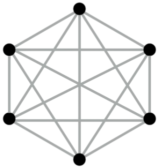
Jogo do Hexágono



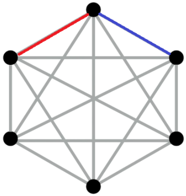
- Dois jogadores (Alice e Bob);
- Os jogadores jogam alternadamente;

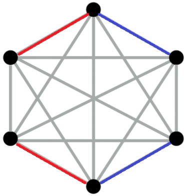


Jogo do Hexágono

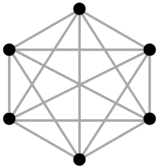


- Dois jogadores (Alice e Bob);
- Os jogadores jogam alternadamente;

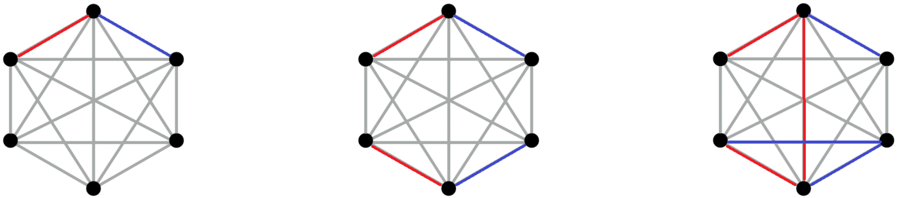




Jogo do Hexágono

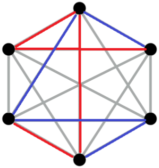


- Dois jogadores (Alice e Bob);
- Os jogadores jogam alternadamente;

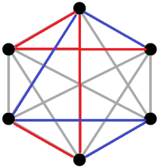


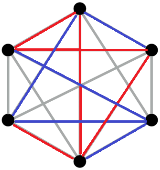
- O jogador que ao final tiver desenhado um triângulo monocromático (azul ou vermelho) perde.

- O jogador que ao final tiver desenhado um triângulo monocromático (azul ou vermelho) perde.

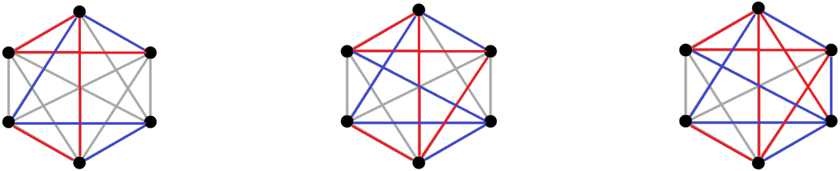


- O jogador que ao final tiver desenhado um triângulo monocromático (azul ou vermelho) perde.

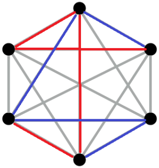


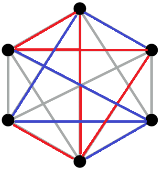


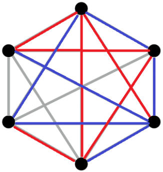
- O jogador que ao final tiver desenhado um triângulo monocromático (azul ou vermelho) perde.

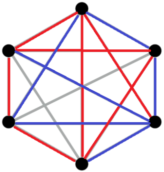


- O jogador que ao final tiver desenhado um triângulo monocromático (azul ou vermelho) perde.

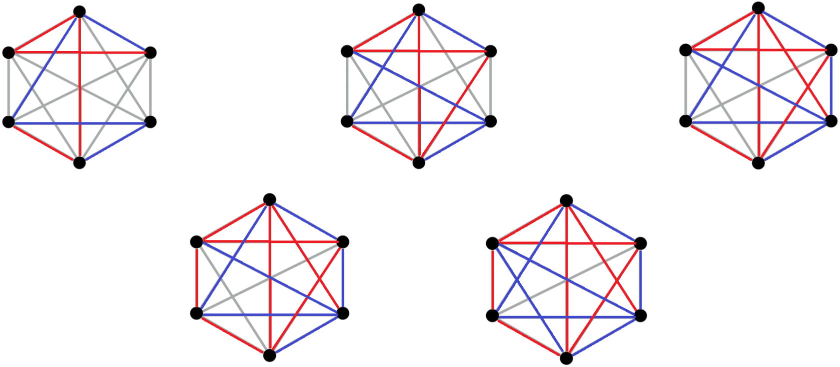




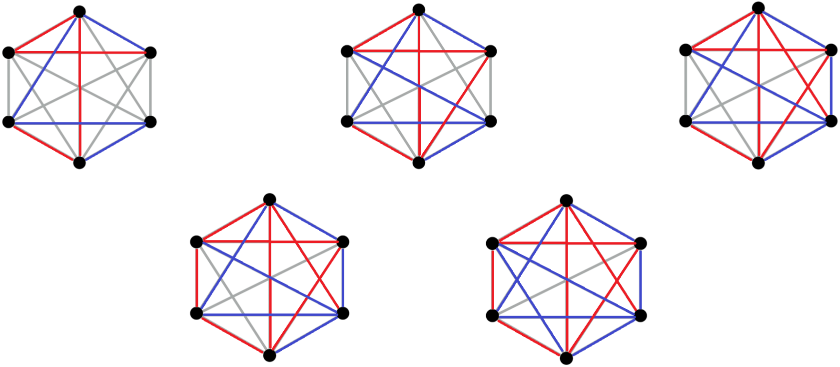




- O jogador que ao final tiver desenhado um triângulo monocromático (azul ou vermelho) perde.



- O jogador que ao final tiver desenhado um triângulo monocromático (azul ou vermelho) perde.



- **Esse jogo pode terminar com um empate?**

Relacionando à Teoria de Grafos:

Definição 1.1 (Grafo)

Par ordenado $G = (V(G), E(G))$ *constituído por um conjunto de vértices* $V(G)$ *e um conjunto de arestas* $E(G)$ *(pares de elementos distintos de* $V(G)$*).*

Relacionando à Teoria de Grafos:

Definição 1.1 (Grafo)

Par ordenado $G = (V(G), E(G))$ *constituído por um conjunto de vértices* $V(G)$ *e um conjunto de arestas* $E(G)$ *(pares de elementos distintos de* $V(G)$*).*

Definição 1.2 (Grafo Completo)

É um grafo em que cada par de vértices distintos é unido por uma aresta (K_n *é o grafo completo com* n *vértices).*

Relacionando à Teoria de Grafos:

Definição 1.1 (Grafo)

Par ordenado $G = (V(G), E(G))$ *constituído por um conjunto de vértices* $V(G)$ *e um conjunto de arestas* $E(G)$ *(pares de elementos distintos de* $V(G)$*).*

Definição 1.2 (Grafo Completo)

É um grafo em que cada par de vértices distintos é unido por uma aresta (K_n *é o grafo completo com* n *vértices).*

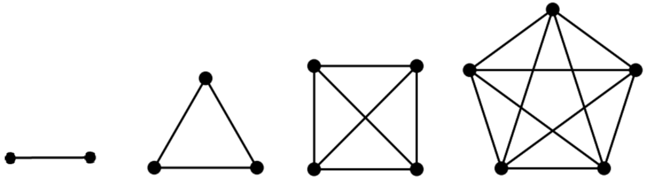


Figura: Da esquerda para a direita: grafos K_2, K_3, K_4 e K_5.

Definição 1.3

Uma 2-coloração das arestas de um grafo G é uma atribuição de duas cores às arestas de G.

Definição 1.3

Uma 2-coloração das arestas de um grafo G é uma atribuição de duas cores às arestas de G.

Exemplo:

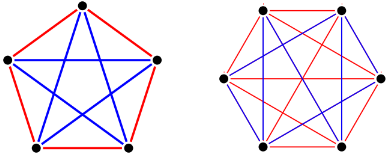


Figura: 2-colorações de K_5 e K_6

Definição 1.3

Uma 2-coloração das arestas de um grafo G é uma atribuição de duas cores às arestas de G.

Exemplo:

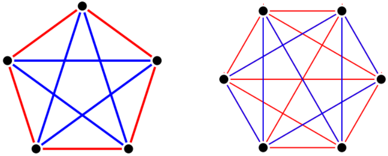


Figura: 2-colorações de K_5 e K_6

Definição 1.4 (Número de Ramsey)

$R(k)$ é o menor $n \in N$ tal que toda 2-coloração das arestas de K_n contém uma cópia monocromática de K_k.

Definição 1.3

Uma 2-coloração das arestas de um grafo G é uma atribuição de duas cores às arestas de G.

Exemplo:

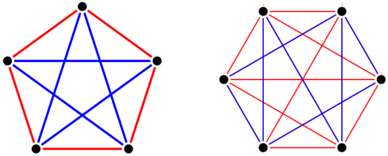


Figura: 2-colorações de K_5 e K_6

Definição 1.4 (Número de Ramsey)

$R(k)$ é o menor $n \in N$ tal que toda 2-coloração das arestas de K_n contém uma cópia monocromática de K_k.

Exemplo: $R(2) = 2$

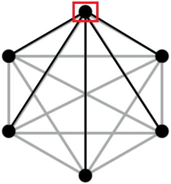
Verificando que $R(3) = 6$

Verificando que $R(3) = 6$

- Há pelo menos 3 arestas com a mesma cor (azul ou vermelha) incidindo em um vértice:

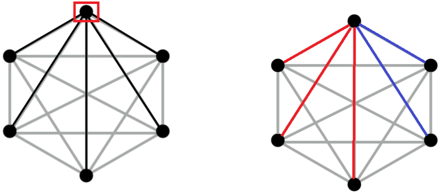
Verificando que $R(3) = 6$

- Há pelo menos 3 arestas com a mesma cor (azul ou vermelha) incidindo em um vértice:



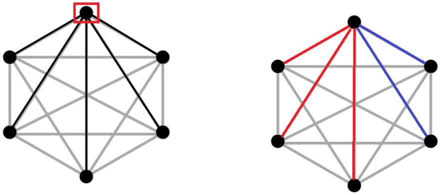
Verificando que $R(3) = 6$

- Há pelo menos 3 arestas com a mesma cor (azul ou vermelha) incidindo em um vértice:



Verificando que $R(3) = 6$

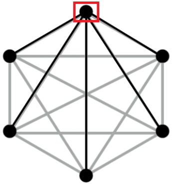
- Há pelo menos 3 arestas com a mesma cor (azul ou vermelha) incidindo em um vértice:

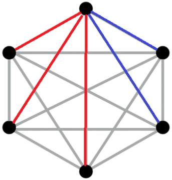


- Olhando apenas os vértices que possuem arestas incidentes com a mesma cor, vemos que existe um triângulo monocromático!

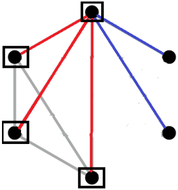
Verificando que $R(3) = 6$

- Há pelo menos 3 arestas com a mesma cor (azul ou vermelha) incidindo em um vértice:



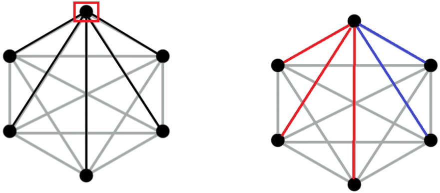


- Olhando apenas os vértices que possuem arestas incidentes com a mesma cor, vemos que existe um triângulo monocromático!

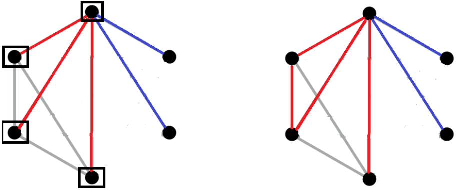


Verificando que $R(3) = 6$

- Há pelo menos 3 arestas com a mesma cor (azul ou vermelha) incidindo em um vértice:

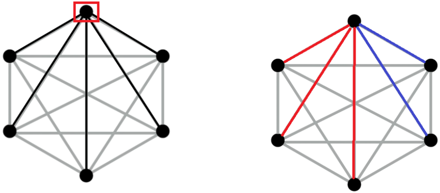


- Olhando apenas os vértices que possuem arestas incidentes com a mesma cor, vemos que existe um triângulo monocromático!

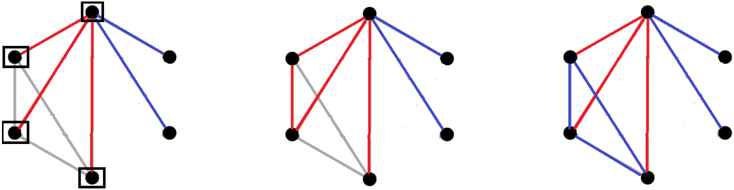


Verificando que $R(3) = 6$

- Há pelo menos 3 arestas com a mesma cor (azul ou vermelha) incidindo em um vértice:



- Olhando apenas os vértices que possuem arestas incidentes com a mesma cor, vemos que existe um triângulo monocromático!



Método Probabilístico

Método Probabilístico

- Método para provar teoremas;

Método Probabilístico

- Método para provar teoremas;
- Se baseia na ideia: Se um evento ocorre com probabilidade positiva, então tal evento é não vazio.

Teorema 1 (Erdős, 1947)

Para todo $k \geq 3$ *inteiro, temos* $R(k) > 2^{k/2}$.

Teorema 1 (Erdős, 1947)

Para todo $k \geq 3$ *inteiro, temos* $R(k) > 2^{k/2}$.

Ideia da Prova: Para $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, mostrar que existe uma 2-coloração das arestas de K_n que não contém K_k *mono*χ.

Teorema 1 (Erdős, 1947)

Para todo $k \geq 3$ inteiro, temos $R(k) > 2^{k/2}$.

Ideia da Prova: Para $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, mostrar que existe uma 2-coloração das arestas de K_n que não contém K_k *mono*χ.

- Tomamos uma 2-coloração aleatória das arestas de K_n.

Teorema 1 (Erdős, 1947)

Para todo $k \geq 3$ inteiro, temos $R(k) > 2^{k/2}$.

Ideia da Prova: Para $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, mostrar que existe uma 2-coloração das arestas de K_n que não contém K_k *mono*χ.

- Tomamos uma 2-coloração aleatória das arestas de K_n.
- Provamos que com probabilidade positiva essa 2-coloração não contém K_k *mono*χ.

Teorema 1 (Erdős, 1947)

Para todo $k \geq 3$ inteiro, temos $R(k) > 2^{k/2}$.

Ideia da Prova: Para $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, mostrar que existe uma 2-coloração das arestas de K_n que não contém K_k *mono*χ.

- Tomamos uma 2-coloração aleatória das arestas de K_n.
- Provamos que com probabilidade positiva essa 2-coloração não contém K_k *mono*χ.
- Assim, existe uma 2-coloração de K_n que não contém K_k *mono*χ, portanto $R(k) > 2^{k/2}$.

Teorema 1 (Erdős, 1947)

Para todo $k \geq 3$ inteiro, temos $R(k) > 2^{k/2}$.

Ideia da Prova: Para $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, mostrar que existe uma 2-coloração das arestas de K_n que não contém K_k *mono*χ.

- Tomamos uma 2-coloração aleatória das arestas de K_n.
- Provamos que com probabilidade positiva essa 2-coloração não contém K_k *mono*χ.
- Assim, existe uma 2-coloração de K_n que não contém K_k *mono*χ, portanto $R(k) > 2^{k/2}$.

Obs.:

Clique: Conjunto de vértices tal que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes.

- Clique monocromática $\equiv$ todas as arestas entre os vértices da clique possuem a mesma cor.

Prova:

- Colorir as arestas de K_n de azul ou vermelho de forma independente e aleatória com probabilidade $\frac{1}{2}$.

Prova:

- Colorir as arestas de K_n de azul ou vermelho de forma independente e aleatória com probabilidade $\frac{1}{2}$.
- Para cada clique $A \subseteq V(K_n)$ com k vértices, note que:

Prova:

- Colorir as arestas de K_n de azul ou vermelho de forma independente e aleatória com probabilidade $\frac{1}{2}$.
- Para cada clique $A \subseteq V(K_n)$ com k vértices, note que:
  - há $\binom{k}{2}$ arestas entre os vértices de A;
  - $$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{A é } \mathit{mono}\chi \text{ vermelha}) &= (1/2)^{\binom{k}{2}} = 2^{-\binom{k}{2}}; \\ \mathbb{P}(\text{A é } \mathit{mono}\chi \text{ azul}) &= (1/2)^{\binom{k}{2}} = 2^{-\binom{k}{2}}. \end{aligned}$$

Prova:

- Colorir as arestas de K_n de azul ou vermelho de forma independente e aleatória com probabilidade $\frac{1}{2}$.
- Para cada clique $A \subseteq V(K_n)$ com k vértices, note que:
  - há $\binom{k}{2}$ arestas entre os vértices de A;
  - $$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{A é } \textit{mono}\chi \text{ vermelha}) &= (1/2)^{\binom{k}{2}} = 2^{-\binom{k}{2}}; \\ \mathbb{P}(\text{A é } \textit{mono}\chi \text{ azul}) &= (1/2)^{\binom{k}{2}} = 2^{-\binom{k}{2}}. \end{aligned}$$
- Probabilidade de A ser *mono*χ é:

$$2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Prova:

- Colorir as arestas de K_n de azul ou vermelho de forma independente e aleatória com probabilidade $\frac{1}{2}$.
- Para cada clique $A \subseteq V(K_n)$ com k vértices, note que:
  - há $\binom{k}{2}$ arestas entre os vértices de A;
  - $$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{A é } mono\chi \text{ vermelha}) &= (1/2)^{\binom{k}{2}} = 2^{-\binom{k}{2}}; \\ \mathbb{P}(\text{A é } mono\chi \text{ azul}) &= (1/2)^{\binom{k}{2}} = 2^{-\binom{k}{2}}. \end{aligned}$$
- Probabilidade de A ser *mono*χ é:
$$2^{1-\binom{k}{2}}.$$
- Probabilidade de existir uma clique *mono*χ de tamanho k em K_n é no máximo:
$$\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}}$$

- Se $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ $(n^k \leq 2^{k^2/2})$,

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} &\leq \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} \\
&= \frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1.
\end{aligned}
$$

- Se $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ ($n^k \leq 2^{k^2/2}$),

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1.$$

- Segue daí que:

$$\mathbb{P}(\nexists \text{ clique } \textit{mono}\chi \text{ em } K_n) = 1 - \mathbb{P}(\exists \text{ clique } \textit{mono}\chi \text{ em } K_n) > 0.$$

- Se $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ ($n^k \leq 2^{k^2/2}$),

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} &\leq \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} \\ &= \frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1. \end{aligned}$$

- Segue daí que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\nexists \text{ clique } \mathit{mono}\chi \text{ em } K_n) &= 1 - \mathbb{P}(\exists \text{ clique } \mathit{mono}\chi \text{ em } K_n) \\ &> 0. \end{aligned}$$

- Logo, existe uma 2-coloração de K_n, com $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, que não possui uma clique *mono*χ de tamanho k.

- Se $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ $(n^k \leq 2^{k^2/2})$,

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1.$$

- Segue daí que:

$$\mathbb{P}(\nexists \text{ clique } monoχ \text{ em } K_n) = 1 - \mathbb{P}(\exists \text{ clique } monoχ \text{ em } K_n) > 0.$$

- Logo, existe uma 2-coloração de K_n, com $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, que não possui uma clique *mono*χ de tamanho k.

- Portanto, $R(k) > 2^{k/2}$.

■

Método do Primeiro Momento

Método do Primeiro Momento

Definição 2.1 (Variável Aleatória)

Uma **variável aleatória** X *em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathbb{P})$ *é uma função real* $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Método do Primeiro Momento

Definição 2.1 (Variável Aleatória)

Uma **variável aleatória** X *em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathbb{P})$ *é uma função real* $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definição 2.2 (Esperança ou Primeiro Momento)

É a média ponderada dos valores que X *pode assumir:*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k).$$

$\rightsquigarrow$ X *é uma variável aleatória inteira não negativa.*

Método do Primeiro Momento

Método do Primeiro Momento

- Consiste em calcular a esperança (primeiro momento) de uma variável aleatória;

Método do Primeiro Momento

- Consiste em calcular a esperança (primeiro momento) de uma variável aleatória;
- Concluir que com probabilidade positiva, deve existir um elemento $\omega \in \Omega$ tal que $X(\omega)$ é tão grande quanto $\mathbb{E}[X]$.

Método do Primeiro Momento

- Consiste em calcular a esperança (primeiro momento) de uma variável aleatória;
- Concluir que com probabilidade positiva, deve existir um elemento $\omega \in \Omega$ tal que $X(\omega)$ é tão grande quanto $\mathbb{E}[X]$.

De modo Simplificado:

- Se $\mathbb{E}[X] \geq t$, então
$$\mathbb{P}(X \geq t) > 0.$$
- Pelo Método Probabilístico, o evento $\{X(\omega) \geq t\}$ é não vazio.

Aplicação: Conjuntos Livres de Soma

Teorema 2 (Erdős)

Se A é um conjunto de n inteiros positivos, então existe $B \subseteq A$ tal que $|B| > n/3$ e B é livre de soma.

Aplicação: Conjuntos Livres de Soma

Teorema 2 (Erdős)

Se A é um conjunto de n inteiros positivos, então existe $B \subseteq A$ tal que $|B| > n/3$ e B é livre de soma.

Definição 2.3 (Conjunto Livre de Soma)

Um conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}$ é dito livre de soma quando $x + y \notin A$, para quaisquer $x, y \in A$ (definido de forma análoga em $\mathbb{Z}_p$).

Teorema 3 (Erdős)

Se A é um conjunto de n inteiros positivos, então existe $B \subseteq A$ tal que $|B| > n/3$ e B é livre de soma.

Teorema 3 (Erdős)

Se A é um conjunto de n inteiros positivos, então existe $B \subseteq A$ tal que $|B| > n/3$ e B é livre de soma.

Ideia da Prova:

- Considere um conjunto Z onde $|Z| > 2 \max A$.

Teorema 3 (Erdős)

Se A é um conjunto de n inteiros positivos, então existe $B \subseteq A$ tal que $|B| > n/3$ e B é livre de soma.

Ideia da Prova:

- Considere um conjunto Z onde $|Z| > 2 \max A$.
- Considere $C \subseteq Z$ livre de soma com $|C| > |Z|/3$:

Teorema 3 (Erdős)

Se A é um conjunto de n inteiros positivos, então existe $B \subseteq A$ tal que $|B| > n/3$ e B é livre de soma.

Ideia da Prova:

- Considere um conjunto Z onde $|Z| > 2 \max A$.
- Considere $C \subseteq Z$ livre de soma com $|C| > |Z|/3$:

- Devemos associar os elementos de A aos elementos Z de maneira que:
  - O mapa de A em Z é injetivo;
  - Elementos mapeados em um conjunto livre de soma em Z formam um conjunto livre de soma em A.

Teorema 3 (Erdős)

Se A é um conjunto de n inteiros positivos, então existe $B \subseteq A$ tal que $|B| > n/3$ e B é livre de soma.

Ideia da Prova:

- Considere um conjunto Z onde $|Z| > 2 \max A$.
- Considere $C \subseteq Z$ livre de soma com $|C| > |Z|/3$: 

- Devemos associar os elementos de A aos elementos Z de maneira que:
  - O mapa de A em Z é injetivo;
  - Elementos mapeados em um conjunto livre de soma em Z formam um conjunto livre de soma em A.
- Se existe um mapa uniforme que satisfaz estas condições, o número esperado de elementos de A mapeados em C é $> |A|/3$.

Teorema 3 (Erdős)

Se A é um conjunto de n inteiros positivos, então existe $B \subseteq A$ tal que $|B| > n/3$ e B é livre de soma.

Ideia da Prova:

- Considere um conjunto Z onde $|Z| > 2 \max A$.
- Considere $C \subseteq Z$ livre de soma com $|C| > |Z|/3$:

- Devemos associar os elementos de A aos elementos Z de maneira que:
  - O mapa de A em Z é injetivo;
  - Elementos mapeados em um conjunto livre de soma em Z formam um conjunto livre de soma em A.
- Se existe um mapa uniforme que satisfaz estas condições, o número esperado de elementos de A mapeados em C é $> |A|/3$.
- Logo, existe $B \subseteq A$ tal que $|B| > |A|/3$ e B é livre de soma.

Prova:

- Considere $\mathbb{Z}_p$, com p primo da forma $p = 3k + 2$, suficientemente grande, tal que $p > 2 \cdot maxA$.

Prova:

- Considere $\mathbb{Z}_p$, com p primo da forma $p = 3k + 2$, suficientemente grande, tal que $p > 2 \cdot maxA$.

- Considere $C = \{k + 1, k + 2, \cdots, k + (k + 1)\} \subseteq \mathbb{Z}_p$.

Prova:

- Considere $\mathbb{Z}_p$, com p primo da forma $p = 3k + 2$, suficientemente grande, tal que $p > 2 \cdot maxA$.
- Considere $C = \{k + 1, k + 2, \cdots, k + (k + 1)\} \subseteq \mathbb{Z}_p$.
- Temos:
  - $|C| = k + 1 > |\mathbb{Z}_p|/3$;
  - C é livre de soma.

Prova:

- Considere $\mathbb{Z}_p$, com p primo da forma $p = 3k + 2$, suficientemente grande, tal que $p > 2 \cdot maxA$.

- Considere $C = \{k + 1, k + 2, \cdots, k + (k + 1)\} \subseteq \mathbb{Z}_p$.

- Temos:
  - $|C| = k + 1 > |\mathbb{Z}_p|/3$;
  - C é livre de soma.

- Considere o mapa aleatório

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ a &\mapsto t \cdot a \bmod p \end{aligned}$$

onde $t \in \mathbb{Z}_p^*$ é escolhido uniformemente ao acaso.

- Note que
  - f é injetivo.

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y)$$

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow t \cdot x \equiv t \cdot y \mod p$$

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow t \cdot x \equiv t \cdot y \mod p \Rightarrow x \equiv y \mod p$$

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow t \cdot x \equiv t \cdot y \mod p \Rightarrow x \equiv y \mod p \quad \lightning$$

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow t \cdot x \equiv t \cdot y \mod p \Rightarrow x \equiv y \mod p \quad ↯$$

  - Se $f(L)$ é livre de soma, $L \subseteq A \Rightarrow L$ é livre de soma.

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow t \cdot x \equiv t \cdot y \mod p \Rightarrow x \equiv y \mod p \quad ↯$$

  - Se $f(L)$ é livre de soma, $L \subseteq A \Rightarrow L$ é livre de soma.
    - Se $x, y \in L$ e $x + y = z \in L$

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow t \cdot x \equiv t \cdot y \mod p \Rightarrow x \equiv y \mod p \quad \lightning$$

  - Se $f(L)$ é livre de soma, $L \subseteq A \Rightarrow L$ é livre de soma.
    - Se $x, y \in L$ e $x + y = z \in L$, então $t \cdot x + t \cdot y \equiv t \cdot z$ mod p.

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow t \cdot x \equiv t \cdot y \mod p \Rightarrow x \equiv y \mod p \quad \lightning$$

  - Se $f(L)$ é livre de soma, $L \subseteq A \Rightarrow L$ é livre de soma.
    - Se $x, y \in L$ e $x + y = z \in L$, então $t \cdot x + t \cdot y \equiv t \cdot z \mod p$. Contradição, pois $f(L)$ é livre de soma em $\mathbb{Z}_p$. □

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow t \cdot x \equiv t \cdot y \mod p \Rightarrow x \equiv y \mod p \quad \lightning$$

  - Se $f(L)$ é livre de soma, $L \subseteq A \Rightarrow L$ é livre de soma.
    - Se $x, y \in L$ e $x + y = z \in L$, então $t \cdot x + t \cdot y \equiv t \cdot z \mod p$. Contradição, pois $f(L)$ é livre de soma em $\mathbb{Z}_p$. □

- Para todo $x \in \mathbb{Z}_p^*$,

$$\mathbb{P}(x \in Im(f)) = ???$$

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow t \cdot x \equiv t \cdot y \mod p \Rightarrow x \equiv y \mod p \quad ↯$$

  - Se $f(L)$ é livre de soma, $L \subseteq A \Rightarrow L$ é livre de soma.
    - Se $x, y \in L$ e $x + y = z \in L$, então $t \cdot x + t \cdot y \equiv t \cdot z \mod p$. Contradição, pois $f(L)$ é livre de soma em $\mathbb{Z}_p$. □

- Para todo $x \in \mathbb{Z}_p^*$,

$$\mathbb{P}(x \in Im(f)) = \frac{|A|}{p-1}.$$

- Como $p = 3k + 2$, $|C| > \dfrac{p-1}{3}$.

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow t \cdot x \equiv t \cdot y \mod p \Rightarrow x \equiv y \mod p \quad \lightning$$

  - Se $f(L)$ é livre de soma, $L \subseteq A \Rightarrow L$ é livre de soma.
    - Se $x, y \in L$ e $x + y = z \in L$, então $t \cdot x + t \cdot y \equiv t \cdot z \mod p$. Contradição, pois $f(L)$ é livre de soma em $\mathbb{Z}_p$. $\square$

- Para todo $x \in \mathbb{Z}_p^*$,

$$\mathbb{P}(x \in Im(f)) = \frac{|A|}{p-1}.$$

- Como $p = 3k + 2$, $|C| > \dfrac{p-1}{3}$.

- Então,

$$\mathbb{E}[|Im(f) \cap C|] = \frac{|A|}{p-1} \cdot |C|$$

- Note que
  - f é injetivo.
    - Se $x, y \in A$, com $x \neq y$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow t \cdot x \equiv t \cdot y \mod p \Rightarrow x \equiv y \mod p \quad \lightning$$

  - Se $f(L)$ é livre de soma, $L \subseteq A \Rightarrow L$ é livre de soma.
    - Se $x, y \in L$ e $x + y = z \in L$, então $t \cdot x + t \cdot y \equiv t \cdot z$ mod p. Contradição, pois $f(L)$ é livre de soma em $\mathbb{Z}_p$. □

- Para todo $x \in \mathbb{Z}_p^*$,

$$\mathbb{P}(x \in Im(f)) = \frac{|A|}{p-1}.$$

- Como $p = 3k + 2$, $|C| > \dfrac{p-1}{3}$.

- Então,

$$\mathbb{E}[|Im(f) \cap C|] = \frac{|A|}{p-1} \cdot |C| > \frac{|A|}{p-1} \cdot \frac{p-1}{3} = \frac{|A|}{3}.$$

- Logo, existe

$$\begin{aligned} f_0 : A &\longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ a &\mapsto t_0 \cdot a \mod p \end{aligned}$$

com $t_0 \in \mathbb{Z}_p^*$ tal que $|Im(f_0) \cap C| > \frac{|A|}{3}$.

- Logo, existe

$$\begin{aligned} f_0 : A &\longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ a &\mapsto t_0 \cdot a \mod p \end{aligned}$$

com $t_0 \in \mathbb{Z}_p^*$ tal que $|Im(f_0) \cap C| > \dfrac{|A|}{3}$.

- Considerando $B = \{a \in A \mid f_0(a) \in C\}$, então:

- Logo, existe

$$\begin{aligned} f_0 : A &\longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ a &\mapsto t_0 \cdot a \mod p \end{aligned}$$

com $t_0 \in \mathbb{Z}_p^*$ tal que $|Im(f_0) \cap C| > \dfrac{|A|}{3}$.

- Considerando $B = \{a \in A \mid f_0(a) \in C\}$, então:
    - B é livre de soma;
    - $|B| > \dfrac{|A|}{3}$.

$\blacksquare$

Método do Segundo Momento ($\mathbb{E}[X^2]$)

Método do Segundo Momento ($\mathbb{E}[X^2]$)

- Em algumas aplicações não será suficiente calcular a esperança de X.

Método do Segundo Momento ($\mathbb{E}[X^2]$)

- Em algumas aplicações não será suficiente calcular a esperança de X.
- Em muitos desses casos, é suficiente provar que com alta probabilidade X é concentrada em torno da sua média (Chebyshev).

Método do Segundo Momento ($\mathbb{E}[X^2]$)

- Em algumas aplicações não será suficiente calcular a esperança de X.
- Em muitos desses casos, é suficiente provar que com alta probabilidade X é concentrada em torno da sua média (Chebyshev).
- Para tal é necessário estimar o segundo momento.

Proposição 3.1 (Linearidade da Esperança)

Para quaisquer duas variáveis aleatórias X e Y e quaisquer números reais a e b, temos que $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$.

Proposição 3.1 (Linearidade da Esperança)

Para quaisquer duas variáveis aleatórias X e Y e quaisquer números reais a e b, temos que $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$.

Definição 3.1

A **variância** *de uma variável aleatória X é definida por*

$$Var(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Proposição 3.1 (Linearidade da Esperança)

Para quaisquer duas variáveis aleatórias X *e* Y *e quaisquer números reais* a *e* b*, temos que* $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$.

Definição 3.1

A **variância** *de uma variável aleatória* X *é definida por*

$$Var(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Proposição 3.1 (Linearidade da Esperança)

Para quaisquer duas variáveis aleatórias X *e* Y *e quaisquer números reais* a *e* b*, temos que* $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$.

Definição 3.1

A **variância** *de uma variável aleatória* X *é definida por*

$$Var(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Proposição 3.2 (Desigualdade de Chebyshev)

Se X *é uma variável aleatória e* $\lambda > 0$*, então*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda) \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2}.$$

Aplicação: Triângulos em $G(n,p)$

Teorema 4

Se $p \gg 1/n$, *então* $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to 1$ *quando* $n \to \infty$.

Aplicação: Triângulos em $G(n,p)$

Teorema 4

Se $p \gg 1/n$, *então* $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to 1$ *quando* $n \to \infty$.

Definição 3.2

Para algum $p = p(n)$, *dizemos que um evento em* $G(n,p)$ *ocorre com alta probabilidade se a probabilidade de tal evento (na distribuição* $G(n,p)$*) converge para 1 quando* $n \to \infty$.

Aplicação: Triângulos em $G(n,p)$

Teorema 4

Se $p \gg 1/n$, *então* $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to 1$ *quando* $n \to \infty$.

Definição 3.2

Para algum $p = p(n)$, *dizemos que um evento em* $G(n,p)$ *ocorre com alta probabilidade se a probabilidade de tal evento (na distribuição* $G(n,p)$*) converge para 1 quando* $n \to \infty$.

Definição 3.3 (Grafo Aleatório de Erdős e Rényi)

Definimos $G(n,p)$ *como o grafo aleatório com* n *vértices obtido ao adicionarmos uma aresta entre cada par de vértices* $V(G(n,p))$ *de forma aleatória e independente com probabilidade* p, $p \in [0,1]$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

Observações:

- $G(n,p)$ não é exatamente um grafo;

Observações:

- $G(n,p)$ não é exatamente um grafo;
- $G(n,p)$ é uma distribuição de probabilidade (mas tratamos como grafo);

Observações:

- $G(n,p)$ não é exatamente um grafo;
- $G(n,p)$ é uma distribuição de probabilidade (mas tratamos como grafo);

Exemplo: Temos que,

$\mathbb{P}(G(4,p) =$  $) = p^6$

Observações:

- $G(n,p)$ não é exatamente um grafo;
- $G(n,p)$ é uma distribuição de probabilidade (mas tratamos como grafo);

Exemplo: Temos que,

$\mathbb{P}(G(4,p) =$  $) = p^6$

$\mathbb{P}(G(4,p) =$  $) = p^4(1-p)^2$.

Observações:

- $G(n,p)$ não é exatamente um grafo;
- $G(n,p)$ é uma distribuição de probabilidade (mas tratamos como grafo);

Exemplo: Temos que,

$$\mathbb{P}(G(4,p) = $$  $$) = p^6$$

$$\mathbb{P}(G(4,p) = $$  $$) = p^4(1-p)^2$$.

- Probabilidade de um grafo com n vértices e m arestas ser escolhido em $G(n,p)$:

$$p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}.$$

Definição 3.4

Dado um evento $A \subseteq \Omega$, definimos a variável indicadora do evento A como a variável aleatória $\mathbb{1}_A$ tal que para cada $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \textit{se } \omega \in A; \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação: $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

Definição 3.4

Dado um evento $A \subseteq \Omega$, definimos a variável indicadora do evento A como a variável aleatória $\mathbb{1}_A$ tal que para cada $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \textit{se } \omega \in A; \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação: $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

Exemplo: Seja $S \subseteq V(G(n,p))$, com $|S| = 3$, e $X_S = \mathbb{1}_{\{\text{S é uma clique}\}}$.

Definição 3.4

Dado um evento $A \subseteq \Omega$, definimos a variável indicadora do evento A como a variável aleatória $\mathbb{1}_A$ tal que para cada $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \textit{se } \omega \in A; \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação: $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

Exemplo: Seja $S \subseteq V(G(n,p))$, com $|S| = 3$, e $X_S = \mathbb{1}_{\{\text{S é uma clique}\}}$.
Então, $\mathbb{E}[X_S] = ???$

Definição 3.4

Dado um evento $A \subseteq \Omega$, definimos a variável indicadora do evento A como a variável aleatória $\mathbb{1}_A$ tal que para cada $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \textit{se } \omega \in A; \\ 0, & \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

Observação: $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

Exemplo: Seja $S \subseteq V(G(n,p))$, com $|S| = 3$, e $X_S = \mathbb{1}_{\{\text{S é uma clique}\}}$.
Então, $\mathbb{E}[X_S] = p^3$.

Exemplo: Se X é a variável aleatória que conta o número de triângulos em $G(n,p)$.

Definição 3.4

Dado um evento $A \subseteq \Omega$, definimos a variável indicadora do evento A como a variável aleatória $\mathbb{1}_A$ tal que para cada $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \textit{se } \omega \in A; \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação: $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

Exemplo: Seja $S \subseteq V(G(n,p))$, com $|S| = 3$, e $X_S = \mathbb{1}_{\{\text{S é uma clique}\}}$.
Então, $\mathbb{E}[X_S] = p^3$.

Exemplo: Se X é a variável aleatória que conta o número de triângulos em $G(n,p)$. Então $X = \sum_{|S|=3} X_S$

Definição 3.4

Dado um evento $A \subseteq \Omega$, definimos a variável indicadora do evento A como a variável aleatória $\mathbb{1}_A$ tal que para cada $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \textit{se } \omega \in A; \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação: $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

Exemplo: Seja $S \subseteq V(G(n,p))$, com $|S| = 3$, e $X_S = \mathbb{1}_{\{\text{S é uma clique}\}}$.
Então, $\mathbb{E}[X_S] = p^3$.

Exemplo: Se X é a variável aleatória que conta o número de triângulos em $G(n,p)$. Então $X = \sum_{|S|=3} X_S$ e

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{|S|=3} X_S\right]$$

Definição 3.4

Dado um evento $A \subseteq \Omega$, definimos a variável indicadora do evento A como a variável aleatória $\mathbb{1}_A$ tal que para cada $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \textit{se } \omega \in A; \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação: $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

Exemplo: Seja $S \subseteq V(G(n,p))$, com $|S| = 3$, e $X_S = \mathbb{1}_{\{\text{S é uma clique}\}}$.
Então, $\mathbb{E}[X_S] = p^3$.

Exemplo: Se X é a variável aleatória que conta o número de triângulos em $G(n,p)$. Então $X = \sum_{|S|=3} X_S$ e

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{|S|=3} X_S\right] = \sum_{|S|=3} \mathbb{E}[X_S] = \binom{n}{3} p^3 \approx n^3 p^3.$$

Notações Assintóticas

Definição 3.5

Escrevemos $f(n) \gg g(n)$ *quando* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Definição 3.6

Escrevemos $f(n) \ll g(n)$ *quando* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Teorema 5

Se $p \gg 1/n$, *então* $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to 1$ *quando* $n \to \infty$.

Teorema 5

Se $p \gg 1/n$, *então* $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to 1$ *quando* $n \to \infty$.

Prova:

- X = variável aleatória que conta o número de triângulos em $G(n,p)$.

Teorema 5

Se $p \gg 1/n$, *então* $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to 1$ *quando* $n \to \infty$.

Prova:

- X = variável aleatória que conta o número de triângulos em $G(n,p)$.
- Observe que $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) = \mathbb{P}(X \geq 1)$.

Teorema 5

Se $p \gg 1/n$, *então* $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to 1$ *quando* $n \to \infty$.

Prova:

- X = variável aleatória que conta o número de triângulos em $G(n,p)$.
- Observe que $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) = \mathbb{P}(X \geq 1)$.
- Como $p \gg 1/n$, $np \gg 1$. Logo, quando $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{3} \cdot p^3 \geq \left(\frac{np}{9}\right)^3 \to \infty.$$

Teorema 5

Se $p \gg 1/n$, *então* $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to 1$ *quando* $n \to \infty$.

Prova:

- X = variável aleatória que conta o número de triângulos em $G(n,p)$.
- Observe que $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) = \mathbb{P}(X \geq 1)$.
- Como $p \gg 1/n$, $np \gg 1$. Logo, quando $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{3} \cdot p^3 \geq \left(\frac{np}{9}\right)^3 \to \infty.$$

- Isto não implica que com alta probabilidade temos um triângulo!

Teorema 5

Se $p \gg 1/n$, *então* $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to 1$ *quando* $n \to \infty$.

Prova:

- X = variável aleatória que conta o número de triângulos em $G(n,p)$.
- Observe que $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) = \mathbb{P}(X \geq 1)$.
- Como $p \gg 1/n$, $np \gg 1$. Logo, quando $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{3} \cdot p^3 \geq \left(\frac{np}{9}\right)^3 \to \infty.$$

- Isto não implica que com alta probabilidade temos um triângulo!
- Devemos usar Chebyshev para mostrar que o evento ruim $\{X = 0\}$ ocorre com probabilidade tendendo a zero.

Teorema 5

Se $p \gg 1/n$, *então* $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to 1$ *quando* $n \to \infty$.

Prova:

- X = variável aleatória que conta o número de triângulos em $G(n,p)$.
- Observe que $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) = \mathbb{P}(X \geq 1)$.
- Como $p \gg 1/n$, $np \gg 1$. Logo, quando $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{3} \cdot p^3 \geq \left(\frac{np}{9}\right)^3 \to \infty.$$

- Isto não implica que com alta probabilidade temos um triângulo!
- Devemos usar Chebyshev para mostrar que o evento ruim $\{X = 0\}$ ocorre com probabilidade tendendo a zero.
- Como X conta o número de triângulos em $G(n,p)$,

$$X = \sum_{|S|=3} X_S.$$

▷ Daí,

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{|S|=3} X_S\right) \cdot \left(\sum_{|T|=3} X_T\right)\right] - \mathbb{E}[X]^2.
\end{aligned}
$$

- Daí,

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{|S|=3} X_S\right) \cdot \left(\sum_{|T|=3} X_T\right)\right] - \mathbb{E}[X]^2. \end{aligned}$$

- Estimando o segundo momento:

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{|S|=3} X_S\right) \cdot \left(\sum_{|T|=3} X_T\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{|S|,|T|=3} X_S \cdot X_T\right].$$

- Daí,

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{|S|=3} X_S\right) \cdot \left(\sum_{|T|=3} X_T\right)\right] - \mathbb{E}[X]^2. \end{aligned}$$

- Estimando o segundo momento:

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{|S|=3} X_S\right) \cdot \left(\sum_{|T|=3} X_T\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{|S|,|T|=3} X_S \cdot X_T\right].$$

- Note que $X_S \cdot X_T = 1$ se, e somente se, S e T são cliques.

- Daí,

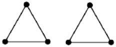
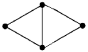
$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$
$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{|S|=3} X_S\right) \cdot \left(\sum_{|T|=3} X_T\right)\right] - \mathbb{E}[X]^2.$$

- Estimando o segundo momento:

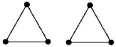
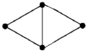
$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{|S|=3} X_S\right) \cdot \left(\sum_{|T|=3} X_T\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{|S|,|T|=3} X_S \cdot X_T\right].$$

- Note que $X_S \cdot X_T = 1$ se, e somente se, S e T são cliques.
- Considere todas as possibilidades de escolher S e T de acordo com o tamanho da intersecção.

- Possibilidades de escolher S e T (dado que $\mathbb{E}[X]^2 \approx n^6 p^6$):

$\|S \cap T\|$	**Figura**	**Escolhas**	**Probabilidade**	**Contribuição**
0		$\binom{n}{3} \cdot \binom{n-3}{3}$	p^6	$\mathbb{E}[X]^2$
1		$\leq n^5$	p^6	$\approx \frac{\mathbb{E}[X]^2}{n} \ll \mathbb{E}[X]^2$
2		$\leq n^4$	p^5	$\approx \frac{\mathbb{E}[X]^2}{n^2 p} \ll \mathbb{E}[X]^2$
3		$\binom{n}{3}$	p^3	$\mathbb{E}[X] \ll \mathbb{E}[X]^2$

- Possibilidades de escolher S e T (dado que $\mathbb{E}[X]^2 \approx n^6 p^6$):

$\|S \cap T\|$	Figura	Escolhas	Probabilidade	Contribuição
0		$\binom{n}{3} \cdot \binom{n-3}{3}$	p^6	$\mathbb{E}[X]^2$
1		$\leq n^5$	p^6	$\approx \frac{\mathbb{E}[X]^2}{n} \ll \mathbb{E}[X]^2$
2		$\leq n^4$	p^5	$\approx \frac{\mathbb{E}[X]^2}{n^2 p} \ll \mathbb{E}[X]^2$
3		$\binom{n}{3}$	p^3	$\mathbb{E}[X] \ll \mathbb{E}[X]^2$

- Assim, quando $n \to \infty$,

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \ll \mathbb{E}[X]^2.$$

- Segue da desigualdade de Chebyshev que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &\leq \mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}[X]/2) \\
&\leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]/2) \\
&\leq \frac{4Var(X)}{\mathbb{E}[X]^2} \to 0,
\end{aligned}
$$

quando $n \to \infty$.

- Segue da desigualdade de Chebyshev que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) &\leq \mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}[X]/2) \\ &\leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]/2) \\ &\leq \frac{4Var(X)}{\mathbb{E}[X]^2} \to 0,\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

- Portanto, $\{X \geq 1\}$ ocorre com alta probabilidade; i.e., com alta probabilidade $G(n,p)$ contém K_3.

$\blacksquare$

Outras Aplicações do Método Probabilístico:

- Sorteio de Grafos;
- Método da Alteração;
- Método da Concentração;
- Lema Local de Lovász;
- As desigualdades de Janson;
- Escolha Aleatória Dependente.

Referências:

Referências:

- Botler, Fábio et al. *COMBINATÓRIA*. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2021.
- Morris, Robert. *Combinatória I - Aula 06*. Youtube-IMPA, 21 de jan. de 2019. Disponível em: <https://goo.gl/j453Mz>. Acesso em 27 out. 2022.
- Mendonça, Walner. *Introdução ao Método Probabilístico*. ToLOCA - UFBA, 28 de nov. de 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=CWB9EHbeknc>. Acesso em 29 out. 2022.
- 33º CBM - Cursos Introdutórios. *Uma Introdução à Combinatória Extremal - Aula 04*. Youtube-IMPA, 02 de ago. de 2021. Disponível em: <https://bit.ly/2UncBD7>. Acesso em 29 out. 2022.

OBRIGADA!!!