Guia do Professor

Combinatória na Genética

Amanda Mourad[1]

Simone Dantas[1]

Telma Silveira Pará[2]

[1]Universidade Federal Fluminense

[2]FAETEC-RJ/ETE Adolpho Bloch

INFORMAÇÕES BÁSICAS

Objetivos

Praticar combinação;
Apresentar os conceitos de Binômio de Newton e Coeficientes Binomiais;
Desenvolver a expansão do Binômio

Material necessário

Computador ou celular, com internet.

Conhecendo o jogo...

A atividade Combinatória na Genética é um desafio para apresentar de maneira lúdica o conteúdo do Binômio de Newton.

Ela é acessada por meio de um Formulário Google, que contém as perguntas, animações e vídeos para construção do conhecimento.

Preparando o material ...

Acesse o formulário Google <...> e crie uma cópia para compartilhar com a sua turma.

Disponibilize aos alunos o link de acesso ao formulário e deixe-os preenchê-lo.

Aplicando o desafio...

O aluno ao preencher o formulário, terá acesso a vídeos explicativos e responderá a questões sobre o conteúdo apresentado.

A correção das respostas às questões do desafio estará disponível ao final do formulário e uma cópia das respostas dadas pelo aluno será enviada para ele por e-mail.

Depois desafio...

O desafio tem como intuito a reflexão de como se desenvolve o Binômio de Newton e como construí-lo. Após essa introdução do conteúdo, faz-se necessária uma formalização dos conceitos aprendidos.

Segue abaixo uma sugestão de como isso pode ser feito, complementando o conteúdo com outros conceitos não vistos na atividade, como o Triângulo de Pascal.

Formalizando...

O desafio tem como intuito a reflexão de como se desenvolve o Binômio de Newton e como construí-lo. Após essa introdução do conteúdo, faz-se necessária uma formalização dos conceitos aprendidos.

Segue abaixo uma sugestão de como isso pode ser feito, complementando o conteúdo com outros conceitos não vistos na atividade, como o Triângulo de Pascal.

Você já deve ter estudado os Produtos Notáveis. O mais conhecido deles é o quadrado da soma:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Mas agora vamos resolver, por meio da Análise Combinatória, expansões para todas as potências naturais da soma de dois números, isto é:

$$\boxed{(a+b)^n,\ onde\ n \in \mathrm{N}}$$

Este desenvolvimento é conhecido como Binômio de Newton. Veremos como ficam as expansões quando n = 0, n = 1 e n = 2:

$$\boxed{\begin{aligned} &(a+b)^0 = 1 \\ &(a+b)^1 = (a+b) \\ &(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}}$$

Até aqui nada muito diferente do que você já viu. Mas e se n = 3? Também é um produto notável, mas vamos analisá-lo de duas formas diferentes!

Primeiro, vamos expandir o binômio $(a+b)^3$ de maneira algébrica:

$$\boxed{\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\ &= (a+b)^2(a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}}$$

Agora, usaremos a Análise Combinatória para resolver a mesma expansão:

$$\boxed{(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)}$$

Para isso, temos que ter em mente que de cada fator (cada parênteses) escolheremos entre “a” ou “b”. Assim, teremos as seguintes possibilidades:

- 3 letras **a** e nenhuma letra **b**, gerando o termo a^3b^0;
- 2 letras **a** e uma letra **b**, gerando o termo a^2b;
- 1 letra **a** e duas letras **b**, gerando o termo ab^2;
- 0 letras **a** e três letras **b**, gerando o termo a^0b^3.

Precisamos contar de quantas formas podemos fazer essas escolhas baseando-nos no número de letras **b** escolhidas:

- 3 **a**’s e 0 **b**’s, gerando o termo $\boldsymbol{a^3b^0}$: Estamos escolhendo nenhum **b** dentre os 3 fatores. Podemos fazer isto de $\binom{3}{0}$ formas distintas, que é a combinação de 3 parênteses tomados 0 a 0, porque são zero b’s.
- 2 **a**’s e 1 **b**, gerando o termo $\boldsymbol{a^2b}$: Estamos escolhendo 1 **b** dentre os 3 fatores e a ordem não importa. Podemos fazer isto de $\binom{3}{1}$ formas, ou seja: **aab**, **aba**, **baa**.
- 1 **a** e 2 **b**’s, gerando o termo $\boldsymbol{ab^2}$: Estamos escolhendo dois b´s dentre os 3 fatores. Podemos fazer isto $\binom{3}{2}$ formas.
- 0 **a**’s e 3 **b**’s, gerando o termo $\boldsymbol{a^0b^3}$: Estamos escolhendo três b´s dentre os 3 fatores. Podemos fazer isto $\binom{3}{3}$ formas.

Com isto, temos o número de formas distintas que cada termo da expansão pode ser escolhido. Assim, temos o seguinte desenvolvimento:

$$\boxed{(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}\,a^0b^3}$$

Os números da forma $\binom{n}{p}$ são chamados de **coeficientes binomiais** e são calculados por meio da fórmula de combinação, onde **n** é o número de coisas a serem escolhidas e nós escolhemos **p** deles. Vejamos:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Substituindo os valores na fórmula acima, encontramos aquela mesma expressão que obtivemos de maneira algébrica.

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Antes analisar o caso geral, onde o expoente é qualquer número natural **n**, vamos ver mais de perto as propriedades da expansão acima, onde **n = 3.**

Observe os expoentes da letra **a.** Perceba que eles estão em ordem decrescente, ou seja, o expoente começa em 3 e vai decrescendo: 3, 2, 1, 0.

$$\boxed{(a+b)^3 = a^{\mathbf{3}}b^0 + 3a^{\mathbf{2}}b + 3a^{\mathbf{1}}b^2 + a^{\mathbf{0}}b^3}$$

Agora, observe que os expoentes de **b** estão em ordem crescente, ou seja, o expoente começa em 0 e vai crescendo: 0, 1, 2, 3.

$$\boxed{(a+b)^3 = a^{\mathbf{3}}b^{\mathbf{0}} + 3a^{\mathbf{2}}b^{\mathbf{1}} + 3a^{\mathbf{1}}b^{\mathbf{2}} + a^{\mathbf{0}}b^{\mathbf{3}}}$$

Se prestarmos bastante atenção, veremos que a soma dos expoentes de cada termo é igual à **n**, que no nosso caso é 3. Vejamos:

$$a^{\mathbf{3}}b^{\mathbf{0}} = \mathbf{3} + \mathbf{0} = 3$$

$$3a^{\mathbf{2}}b^{\mathbf{1}} = \mathbf{2} + \mathbf{1} = 3$$

$$3a^{\mathbf{1}}b^{\mathbf{2}} = \mathbf{1} + \mathbf{2} = 3$$

$$a^{\mathbf{0}}b^{\mathbf{3}} = \mathbf{0} + \mathbf{3} = 3$$

Vamos considerar que o expoente de **b** seja igual a um número natural **p**, que tem valores de 0 até **n**, vamos ter então a seguinte relação:

$$a^{n-p}b^p$$

Será que isso acontece mesmo? Vamos montar uma tabela para o caso n = 3 e usar essa relação para ver se encontramos os mesmos termos.

p = 0	p = 1	p = 2	p = 3
$a^{n-p}b^p$ $= a^{3-0}b^0$ $= \boldsymbol{a^3}$	$a^{n-p}b^p$ $= a^{3-0}b^0$ $= \boldsymbol{a^2b^1}$	$a^{n-p}b^p$ $= a^{3-0}b^0$ $= \boldsymbol{a^1b^2}$	$a^{n-p}b^p$ $= a^{3-0}b^0$ $= \boldsymbol{b^3}$

Observe a tabela. Conseguimos encontrar uma maneira de achar os termos da expansão. Mas e os coeficientes? Como podemos calculá-los?

Nós já vimos o resultado das expansões de $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$. e $(a+b)^3$. Vamos analisar esses resultados:

$$1$$

$$a+b$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Agora observe os coeficientes:

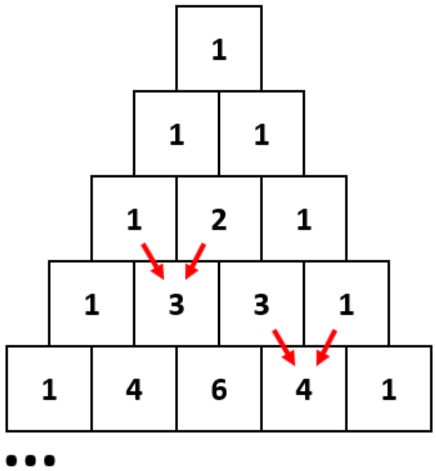
$$\mathbf{1}$$

$$\mathbf{1}a + \mathbf{1}b$$

$$\mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2$$

$$\mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3$$

Perceba que a aparência é de triângulo. Esses coeficientes formam o chamado Triângulo de Pascal. Vamos analisar mais detalhadamente na figura a seguir.



Perceba que, a partir da terceira linha, cada número é formado pelos dois números acima dele somados (exceto para as bordas, que são todas "1").

Mas e se n for um número muito grande? Precisamos construir o triângulo inteiro dessa forma? O que você acha?

Nós já vimos uma forma geral de encontrar os termos de uma expansão. Agora, veremos uma outra forma de construir o triângulo e descobrir os coeficientes da expansão desejada.

Lembra do coeficiente binomial? Vamos trabalhar com ele agora!

Observe o Triângulo de Pascal formado pelos coeficientes binomiais.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\vdots \quad \vdots \\
\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{4} \cdots \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Agora você pode calcular qualquer valor no Triângulo de Pascal diretamente (sem calcular todo o triângulo acima dele).

Já vimos uma forma geral para calcular os coeficientes e os termos da expansão, vamos então juntar o que temos.

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n}$$

E esse é o termo geral para o Binômio de Newton, onde *n* é um número natural.

Complementando a aula...

A atividade tem, também, o intuito de mostrar aplicação do conteúdo na área de Biologia, em particular, na Genética. Na Genética, as características que apresentamos são determinadas pelos genes que possuímos e pela influência do meio ambiente. Mas como surgiu a genética?

Gregor Johann Mendel (1822-1884), considerado o pai da genética era um filho de uma família de agricultores e já na infância se revelava muito inteligente. Era um aluno que gostava de estudar e observar plantas. Assim, a sua família que não possuía muitos recursos o incentivou a entrar num mosteiro, pois naquela época exercer uma atividade religiosa era uma das poucas oportunidades que se tinha para estudar

No mosteiro em uma pequena cidade no que hoje é a República Tcheca, Mendel passou sete anos cultivando quase 30 mil plantas de ervilha. Ele separava as partes das plantas para poder fazer os cruzamentos controlados e então poder entender como características simples como a forma das sementes, a cor das flores eram passados de uma geração a outra. Seu objetivo era criar plantas de ervilha híbridas e observar o resultado. Suas observações levaram a mais experimentos, cujas conclusões são extraordinárias.

Simplesmente contando ervilhas e mantendo anotações meticulosas, Mendel estabeleceu os princípios da herança e foi o primeiro a usar métodos estatísticos para analisar e prever informações hereditárias. Durante oito anos, Mendel cultivou milhares de pés de ervilha e usou um pincel para transferir meticulosamente o pólen de uma planta para outra para fazer seus cruzamentos (o tempo todo e ainda cumprindo seus deveres como monge e professor). Deste estudo nasceram as duas leis da hereditariedade além da descoberta de fatores recessivos e dominantes. Este trabalho intitulado "Experimentos em hibridização de plantas" foi publicado em 1866. Apesar de ter apresentado o trabalho e o enviado a muitos pesquisadores da época, ninguém deu importância a ele. Nem mesmo Charles Robert Darwin (1809-1882), a quem o trabalho foi enviado, teve conhecimento da obra de Mendel. Somente após sua morte, em 1901, o trabalho foi redescoberto por dois botânicos europeus que o publicaram novamente e Mendel, então, ganhou notoriedade e se tornou o pai da Genética.

Notamos que Mendel e seu estudo e conhecimento não foram valorizados em sua época. Isso nos faz refletir em quantas pessoas com seus saberes deixamos de valorizar em nosso dia a dia. Quantas pessoas não enxergamos no nosso cotidiano, seja porque são diferentes ou por não concordarem conosco?

Muitos saberes intuitivos e práticos são relegados a uma condição mística e na maioria das vezes são menosprezados. Por exemplo, aquele chá que nossos avós sempre recomendavam e eram ignorados, hoje são explorados pela indústria farmacêutica. Porém, a história de Mendel merece algumas reflexões. Uma que se refere aos materiais que ele utilizou, pois ele desenvolveu um sofisticado trabalho de pesquisa com o que tinha no quintal: flores, ervilhas e outras plantas, ou seja, coisas simples que estavam disponíveis para ele, bastou uma observação mais atenta.

Também Mendel sofreu com a falta de recursos para estudar, mas com perseverança e ajuda da família conseguiu entrar para uma ordem religiosa que o possibilitou continuar os estudos. Além disso, conseguiu publicar um artigo em revista científica, conciliando o trabalho de monge e professor, o que demandou muito empenho. Uma última reflexão que a história de Mendel nos revela está na necessidade de valorizar e preservar o conhecimento ancestral, no esforço de compreendê-lo e validá-lo como uma rica fonte de informações capazes de solucionar problemas atuais da humanidade.

Referências...

O legado do monge invisível – Revista FAPESP, ed. 239, Jan 2016. https://revistapesquisa.fapesp.br/o-legado-de-um-monge-invisivel/

Gregor Mendel: A Private Scientist. https://www.nature.com/scitable/topicpage/gregor-mendel-a-private-scientist-6618227/

Sugestões? Mande mensagem para: antenabrasileira@gmail.com

Para acompanhar nossas notícias, acesse nosso site
http://www.antenabrasil.uff.br

Ou nossa página no Facebook:
https://www.facebook.com/antenabrasileiradematematica/

Agradecimentos...

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e das seguintes instituições e órgãos de fomento brasileiros: